Über die Diskriminantenflächen der Gleichungen

$$A + \cos x + B \sin 2x + C \cos 2x + D \cos 3x = 0.$$

Von

Rudolf Kleeberg.

Von der K. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften genehmigte Dissertation.

ACAD. LUDWIGS BIBL.

Referent: Professor **Dr. Heinrich Burkhardt.**

Korreferent: Geheimer Rat Professor **Dr. Walther Ritter von Dyck.**

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Juli 1911.

München 1911.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555409_0088

Einleitung.

Die trigonometrische Gleichung

$$(1) \qquad A + \cos x + B \sin 2x + C \cos 2x + D \cos 3x = 0,$$

worin unter A, B, C, D reelle Konstante verstanden sein sollen, kann durch Einführung von $\lambda = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ in die algebraische Gleichung 6^{ten} Grades in λ übergeführt werden:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\lambda^6 (C - D + A - 1) - \lambda^5 \cdot 4B - \lambda^4 (5C - 15D - 3A + 1) \\ &- \lambda^2 (5C + 15D - 3A - 1) + \lambda \cdot 4B + C + D + A + 1 = 0. \end{aligned}$$

Durch Integration nach x geht die linke Seite von (1) in die Funktion über

$$z = Ax + \sin x - \frac{B}{2} \cos 2x + \frac{C}{2} \sin 2x + \frac{D}{3} \sin 3x + E,$$

und die Gleichung (1) ist Bedingung dafür, daß die Funktion z im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ an der Stelle x ein Extrem besitzt.

Für $A = 0$ wird die stetige Funktion z periodisch und hat daher im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ mindestens ein reelles Maximum und ein reelles Minimum, was für reelle Werte B, C, D und E auch sein mögen. Infolgedessen hat Gleichung (2) für $A = 0$ und beliebige reelle Werte von B, C, D stets mindestens zwei reelle Wurzeln.

Deuten wir die Konstanten B, C, D als Punktkoordinaten im 3-dimensionalen Raum, und die Konstante A als veränderlichen Parameter, so stellen die Diskriminanten der für die verschiedenen Werte des Parameters A durch (1) oder (2) dargestellten Gleichungen ein System von abwickelbaren Flächen dar, deren Tangentialebenen durch (1) oder (2) definiert sind.

Die dem Parameter $A = 0$ entsprechende Diskriminantenfläche teilt den Gesamtraum in 3 Unterräume R_0, R_1, R_2 ein, welche von den reellen Tangentialebenen der Fläche bzw. 6-, 4- oder 2-fach durchschnitten werden.

Wird die Konstante A gegenüber B, C, D relativ groß, so kann die Funktion z angenähert durch

$$z_1 = A \cdot x + \sin x + E$$

ersetzt werden, welche, sobald $|A| > 1$ ist, kein reelles Extrem besitzt. Für solche Werte der Konstanten hat daher Gleichung (2) keine reelle Wurzeln, und die dazugehörigen Diskriminantenflächen teilen den Raum in 4 Unterräume R_0, R_1, R_2 und R_3 ein, von welchen die drei ersten wie oben definiert sind, während in den letzten Raum R_3 keine reelle Tangentialebene der Diskriminantenfläche eindringt.

Die nachfolgende Untersuchung gibt ein vollkommenes Bild der zu einer derartigen trigonometrischen Gleichung gehörigen Schar von Diskriminantenflächen 10^{ter} Ordnung und zeigt insbesondere, von dem Fall $A = 0$ ausgehend, die Entstehung und weitere Entwicklung des Raumes R_3 für absolut wachsende Werte des Parameters A und stellt die dabei auftretenden und verschwindenden reellen Flächensingularitäten fest. An den der Arbeit beigegebenen Figuren wird außerdem ein Verfahren erläutert, welches dazu dienen kann, die Anzahl und Lage der reellen Extreme der Funktion

$$y = \cos x + a \sin 2x + b \cos 2x + c \cos 3x$$

im Intervall $-1 \leqq x < +1$ graphisch zu ermitteln.

Bevor ich zur Ausarbeitung des Themas übergehe, sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Burkhardt, für sein gütiges Interesse an der Arbeit meinen ehrerbietigsten und wärmsten Dank auszusprechen.

§ 1.

Über eine Darstellungsweise abwickelbarer Flächen.

Die Schar der Schmiegungsebenen einer Raumkurve sei durch die Gleichung

$$x \cdot \varphi(t) + y \cdot \psi(t) + z \cdot \chi(t) + \varrho(t) = 0 \tag{1}$$

mit dem veränderlichen Parameter t definiert. Der Ort des Schnittes zweier benachbarter Ebenen der Schar ist die zur Raumkurve gehörige abwickelbare Fläche, deren Gleichung in entwickelter Form durch Elimination von t aus (1) und aus

$$x \cdot \varphi'(t) + y \cdot \psi'(t) + z \cdot \chi'(t) + \varrho'(t) = 0 \tag{2}$$

gewonnen wird. Gleichung (1) werde nach t integriert. Man erhält dann

$$x \cdot \int \varphi(t)\,dt + y \int \psi(t)\,dt + z \int \chi(t)\,dt + \int \varrho(t)\,dt + C = 0. \tag{3}$$

Für einen bestimmten Wert der Integrationskonstanten C kann (3) als Gleichung der Schar der Schmiegungsebenen einer anderen Raumkurve aufgefaßt werden, deren Gleichung sich in Parameterform durch Auflösung von (1), (2), (3) nach x, y, z ergibt. Diese Raumkurve ist die Rückkehrkante der durch (3) und (1) definierten abwickelbaren Fläche. Die Koordinaten x, y, z der Punkte dieser Rückkehrkante genügen den Gleichungen (1) und (2). Infolgedessen liegt dieselbe auf der durch (1) und (2) definierten Fläche. Diese letztere erscheint demnach als Gesamtheit der Rückkehrkanten der durch (3) und (1) definierten Flächen, wenn die Integrationskonstante C als variabel gedacht wird.

Es werde

$$t = u$$
$$C = v$$

gesetzt.

Die Auflösung der obigen drei Gleichungen nach x, y, z ergibt dann eine Darstellung der durch (1) und (2) definierten Fläche in

Parameterform. Die Parameterkurven $u = \text{const.}$ sind die Erzeugenden der Fläche, und die Parameterkurven $v = \text{const.}$ die Rückkehrkanten von unendlich vielen abwickelbaren Flächen, welche durch (3) und (1) definiert sind. Diese Art der Darstellung einer abwickelbaren Fläche ist natürlich nur dann brauchbar, wenn die in (3) bezeichnete Integration nach t leicht ausführbar ist, z. B. in folgendem Fall:

Statt Gleichung (1) sei

$$\sin x - a\cos 2x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0 \tag{4}$$

vorgelegt. Durch Integration nach x entsteht daraus die der Gleichung (3) entsprechende Gleichung

$$A + \cos x + B\sin 2x + C\cos 2x + D\cos 3x = 0, \tag{5}$$

wenn statt $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{3}$ und der Integrationskonstanten bzw. B, C, D und A eingeführt werden. Wir deuten nun B, C, D und A auf die in der Einleitung erläuterten Weise als Punktkoordinaten bzw. Parameter und legen der Untersuchung der Diskriminantenflächen von (5) (welche identisch sind mit den abwickelbaren Flächen, deren Tangentialebenen durch (5) definiert sind) diejenige der Gleichung (4) samt dem auf ihr liegenden System der Rückkehrkanten der Diskriminantenflächen von (5) zugrunde.

Dadurch bekommen wir zunächst ein Bild von der gegenseitigen Lage der Flächen und können dann die Untersuchung der einzelnen Flächen für die verschiedenen Werte der Konstanten A für sich vornehmen.

§ 2.

Über die Umformung trigonometrischer Gleichungen in algebraische.

Wir werden bei der Untersuchung der Diskriminantenfläche der Gleichung

$$\sin x - a\cos 2x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0 \tag{1}$$

öfter mit Vorteil die algebraischen Gleichungen benützen, in welche die trigonometrische Gleichung übergeführt werden kann.

Durch die Einführung von Exponentialgrößen ergibt sich aus (1) die Gleichung

$$(2) \qquad c \cdot y^6 + (b - a\,i)\,y^5 + y^4 - y^2 - (b + a\,i)\,y - c = 0.$$

Dabei ist

$$(3) \qquad y = e^{ix}$$

gesetzt worden. Es ist ersichtlich, wie durch die Substitutionen

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + \frac{1}{e^{ix}}\right) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{i}{2}\left(e^{ix} - \frac{1}{e^{ix}}\right)$$

aus (1) eine den reziproken Gleichungen ähnliche Gleichung hervorgeht, und wie die Verschiedenheit in den Vorzeichen der Glieder in denjenigen Koeffizienten, die sich bei reziproken Gleichungen in bekannter Weise entsprechen, durch das gleichzeitige Vorhandensein von sinus- und cosinus-Gliedern in (1) beeinflußt wird.

Die Beziehungen zwischen den Wurzeln von (1) und (2) gehen aus der durch die Substitution (3)

$$y = e^{ix}$$

oder

$$u + i\,v = e^{i(\xi + i\eta)}$$

vermittelten Abbildung der x-Ebene auf die y-Ebene hervor. Durch diese Beziehung wird bekanntlich der Periodenstreifen der trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$, der von den Parallelen $\xi = \pm\pi$ der x-Ebene begrenzt ist, auf die gesamte y-Ebene konform abgebildet. Das Stück der reellen ξ-Achse zwischen den Abszissen $-\pi$ und $+\pi$ geht in den Einheitskreis der y-Ebene über, das Innere desselben entspricht dem auf der „positiven x-Halbebene“ liegenden Teil des Streifens, und das Äußere des Kreises den anderen Teil des Streifens. Konjugierte Punkte der x-Ebene gehen in in bezug auf den Einheitskreis der y-Ebene gespiegelte Punkte über, während konjugierten Punkten der y-Ebene in bezug auf die η-Achse der x-Ebene gespiegelte Punkte entsprechen.

Den reellen Wurzeln der Gleichung (1) werden daher Wurzeln der Gleichung (2) vom absoluten Betrage 1 entsprechen, und konjugiert imaginäre Wurzeln von (1) entsprechen in bezug auf den Einheitskreis gespiegelte Wurzeln von (2). Die Frage nach den reellen Wurzeln von (1) fällt demnach zusammen mit der Frage nach den Wurzeln vom absoluten Betrage 1 der Gleichung (2).

Zur Bestimmung dieser Wurzeln bilden wir durch eine lineare Substitution den Einheitskreis der y-Ebene auf die gesamte reelle Achse einer z-Ebene ab, und fragen nach den reellen Wurzeln der durch diese Substitution aus der Gleichung (2) hervorgegangenen Gleichung in z.

Eine Substitution, welche diese Abbildung leistet, kann auf die Form gebracht werden

$$y = e^{i\gamma} \frac{z - \alpha}{z - \beta}. \tag{4}$$

Dabei bedeutet γ eine reelle Zahl; α und β sind konjugiert-imaginär und die Bilder des Nullpunktes bzw. des unendlich fernen Punktes der y-Ebene in der z-Ebene.

Wir setzen speziell in (4) erstens: $\gamma = \pi$, $\alpha = +i$, $\beta = -i$. Damit ordnen wir den Punkten $y = 1,\ i,\ -1$ auf dem Einheitskreis der y-Ebene oder den Punkten $x = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ auf der reellen Achse der x-Ebene die Punkte bzw. $z = 0,\ 1,\ \infty$ auf der reellen Achse der z-Ebene zu. In dieser speziellen Substitution wollen wir z mit z' bezeichnen.

Aus

$$y = -\frac{z' - i}{z' + i} \tag{4a}$$

folgt

$$z' = i\frac{1 - e^{ix}}{1 + e^{ix}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \tag{4b}$$

Durch diese spezielle Substitution geht Gleichung (2) über in

$$\frac{2i}{[z' + i]^6} \cdot [a \cdot z'^6 - 2(1 - 2b + 3c)z'^5 - 5az'^4 - 4(1 - 5c)z'^3 - 5az'^2 - 2(1 + 2b + 3c)z' + a] = 0. \tag{5}$$

Die Eigenschaft dieser Gleichung, für reelle Werte der Koeffizienten a, b, c reelle und konjugiert-imaginäre Wurzeln zu besitzen, hat demnach auch Gleichung (1) und Gleichung (2), besitzt infolgedessen Wurzeln auf dem Einheitskreis und paarweise in bezug auf den Einheitskreis gespiegelte Wurzeln. Da durch die Abbildung des Einheitskreises der y-Ebene auf die reelle Achse der z-Ebene in bezug auf den Einheitskreis der y-Ebene gespiegelte Punkte in konjugierte Punkte der z-Ebene übergehen, so haben sämtliche der durch die Substitution (4) aus (2) hervorgehende Gleichungen die Eigenschaft,

Wurzeln zu besitzen, welche für reelle Werte von a, b, c reell oder immer konjugiert-imaginär sind. Diese Gleichungen sind nach Ausführung der Substitution (4) in (2) von der Form $P + iQ = 0$, wobei aber P von Q nur um einen von α, β, γ abhängigen Faktor verschieden ist, so daß es gleich bleibt, die Wurzeln aus $P = 0$ oder aus $Q = 0$ zu bestimmen.

Diese Gleichungen können aber auch durch lineare Transformation einer beliebigen von ihnen, z. B. von (5), erhalten werden.

Aus (3), (4b) und (4) folgt nämlich

$$(6) \qquad z = \frac{(a\,e^{i\gamma} - \beta) - i\,(a\,e^{i\gamma} + \beta)z'}{e^{i\gamma} - 1 - i\,(e^{i\gamma} + 1)z'} = \frac{\mu + \lambda \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \left(\lambda - \mu \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)z'}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - z'}$$

und

$$(7) \qquad z' = -\,i\,\frac{(a\,e^{i\gamma} - \beta) - (e^{i\gamma} - 1)z}{(a\,e^{i\gamma} + \beta) - (e^{i\gamma} + 1)z} = \frac{\mu + \lambda \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot z}{\lambda - \mu \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - z},$$

wenn

$$a = \lambda + i\mu$$
$$\beta = \lambda - i\mu$$

gesetzt wird.

In diesem Zusammenhang stehen die Wurzeln z jener allgemeinen Gleichungen mit den Wurzeln z' der speziellen Gleichung (5).

Es sei noch bemerkt, daß sich die Wurzeln z der allgemeinen algebraischen Gleichungen und die Wurzeln x der Gleichung (1) gegenseitig aus

$$x = \gamma - i \log \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

und (6) berechnen.

Substituieren wir weiter in (4) zweitens:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = i, \quad \beta = -\,i.$$

Gleichung (2) geht dann durch die Substitution

$$y = i \cdot \frac{z - i}{z + i}$$

über in

$$(8) \qquad \frac{2}{(z+i)^6}\,[(b - c - 1)z^6 - 4\,a\,z^5 - (1 - 15\,c + 5\,b)z^4 + (1 - 15\,c - 5\,b)z^2 + 4\,a\,z + 1 + b + c] = 0.$$

Diese Gleichung würde auch aus (1) durch Ersetzen von x durch $90^0 + x$ und von b durch $-b$ hervorgehen, wenn dann in der so erhaltenen Gleichung $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ substituiert würde oder auch aus (5) durch die Substitution

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

Natürlich beide Male bis auf einen auf der linken Seite auftretenden konstanten Faktor. Die Gleichungen (2), (5) oder (8) können ihrer Einfachheit halber der algebraischen Behandlung des Problems zu Grunde gelegt werden.

§ 3.

Die Diskriminantenfläche der Gleichung $\sin x - a\cos 2x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0$.

Die Diskussion der Diskriminantenfläche der Gleichung

$$\sin x - a\cos 2x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0$$

kann rein algebraisch durchgeführt werden, wobei zweckmäßig auf die vorhin genannten Gleichungen des vorausgehenden Paragraphen zurückgegriffen wird oder auch vom geometrischen Standpunkte aus durch Betrachtung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \sin x - a\cos 2x + b\sin 2x + c\sin 3x = 0\\
&(2) \quad \cos x + 2a\sin 2x + 2b\cos 2x + 3c\cos 3x = 0\\
&(3) \quad -\sin x + 4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 9c\sin 3x = 0\\
&(4) \quad -\cos x - 8a\sin 2x - 8b\cos 2x - 27c\cos 3x = 0\\
&(5) \quad +\sin x - 16a\cos 2x + 16b\sin 2x + 81c\sin 3x = 0 \text{ etc.},
\end{aligned}$$

das durch wiederholte Differentiation der ersten Gleichung desselben nach dem Parameter x entsteht. Wir werden beide Arten der Durchführung zweckmäßig nebeneinander verwenden.

Zunächst bemerken wir Folgendes: die Gleichung (1) bleibt ungeändert, wenn statt

$$a, \quad b, \ c \text{ und } x$$

substituiert wird:

$$\begin{aligned}
&\text{entweder} \quad -a, \ -b, \ c \text{ und } x + \pi\\
&\text{oder} \quad -a, \ b, \ c \ \text{„} \ -x\\
&\text{oder} \quad a, \ -b, \ c \ \text{„} \ \pi - x.
\end{aligned}$$

Für diese 4 Tripel von Koeffizienten hat demnach Gleichung (1) immer gleich viele reelle Wurzeln, die sich in der angegebenen Weise voneinander unterscheiden. Die Diskriminantenfläche der Gleichung (1) liegt daher symmetrisch in bezug auf die ac- und bc-Koordinatenebene.

Durch Integration der linken Seite von (1) entsteht (bis auf das Vorzeichen) die Funktion

$$(6) \qquad y = \cos x + \frac{a}{2}\sin 2x + \frac{b}{2}\cos 2x + \frac{c}{3}\cos 3x.$$

Die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (1) gibt demnach die Anzahl der reellen Extreme x der Funktion y im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ an.

Als stetige Funktion erreicht y im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ die obere und die untere Grenze der Funktionswerte. Da y ferner die Periode 2π besitzt, so wird im allgemeinen weder die obere noch die untere Grenze der Funktionswerte, die sie in diesem Intervall annimmt, mit den Grenzen desselben zusammenfallen. Daher hat die Funktion y in diesen Fällen im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ mindestens ein reelles Maximum und ein reelles Minimum. Wenn aber die obere bzw. die untere Grenze der Funktionswerte y mit den Grenzen des Intervalles zusammenfällt, so besitzt y wegen ihrer Periodizität für $x = \pm\pi$ ein Maximum bzw. ein Minimum. Innerhalb des Intervalles hat y dann jedenfalls mindestens noch ein reelles Minimum bzw. ein reelles Maximum. Die Gleichung (1) hat daher für beliebige reelle Werte von a, b, c mindestens 2 reelle Wurzeln, womit die diesbezügliche Bemerkung in der Einleitung gerechtfertigt ist[1]).

Wir gehen nun daran, die Singularitäten der Diskriminantenfläche zu besprechen. Die Gleichung der Rückkehrkante derselben ergibt sich bekanntlich durch Auflösung von (1), (2) und (3) nach a, b, c. Die drei Gleichungen lassen eine Auflösung in endlichen

[1]) Auch als spezieller Fall des Theorems von Sturm (Liouv. Journ. vol. 1 (1836), p. 433): Die Funktion

$$\Phi(x) = \sum_{m}^{k} n \,(a_n \cos n x + b_n \sin n x),$$

in welcher die Konstanten a_m und b_m und also auch a_k und b_k nicht beide Null sind, verschwindet und ändert das Zeichen in wenigstens $2m$ und in höchstens $2k$ ausgezeichneten Punkten des Intervalles $-\pi \leqq x < +\pi$.

Werten a, b, c nicht zu, sobald $x = \pm\frac{\pi}{3}$ oder $x = \pm\frac{2\pi}{3}$ ist. Die diesen Parameterwerten x entsprechenden Erzeugenden der Fläche sind Asymptoten des räumlichen Teiles der Rückkehrkante. Die Auflösung der 3 Gleichungen wird unbestimmt für $x = 0$ oder $x = \pi$. In diesen beiden Fällen reduzieren sich die 3 Gleichungen auf

$$\begin{matrix} a = 0 \\ 1 + 2b + 3c = 0 \end{matrix} \quad \text{bzw. auf} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ 1 - 2b + 3c = 0. \end{matrix}$$

Die Rückkehrkante der Fläche enthält demnach auch einen ebenen Teil, nämlich die den Parametern $x = 0$ bzw. $x = \pi$ entsprechenden Erzeugenden der Fläche in der bc-Koordinatenebene (stationäre Erzeugende). Der räumliche Teil wird durch die Kurve 10^{ter} Ordnung dargestellt:

$$a = \frac{8}{5}\,\frac{\sin^5 x}{4\cos^2 x - 1} = \frac{256}{5}\cdot\frac{\lambda^5}{(\lambda^2+1)^3(3\lambda^4 - 10\lambda^2 + 3)}$$

$$b = \frac{4}{5}\,\frac{(2\cos^2 x - 5)\cos^3 x}{4\cos^2 x - 1} = \frac{4}{5}\,\frac{(3\lambda^4 + 14\lambda^2 + 3)(\lambda^2 - 1)^3}{(\lambda^2+1)^3(3\lambda^4 - 10\lambda^2 + 3)}$$

$$c = \frac{3}{5}\,\frac{1}{4\cos^2 x - 1} = \frac{3}{5}\,\frac{(1+\lambda^2)^2}{3\lambda^4 - 10\lambda^2 + 3}$$

Die Einführung von $\lambda = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ hat die reziproke Form der Polynome in λ zur Folge. Einem Übergang von λ zu $\frac{1}{\lambda}$ entspricht nämlich ein solcher von x zu $\pi - x$, also von a, b, c zu a, $-b$, c; das Ersetzen von λ durch $-\lambda$ ist demjenigen von x durch $-x$, also von a, b, c durch $-a$, b, c gleichwertig.

Durch Auflösung von (1), (2), (3), (4) nach a, b, c, x ergeben sich 2 reelle Paare Rückkehrkantenspitzen, nämlich

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = +0{,}8 \\ c = +0{,}2 \\ x = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -0{,}8 \\ c = +0{,}2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = +1{,}6 \\ c = -0{,}6 \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -1{,}6 \\ c = -0{,}6 \\ x = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Die Koordinaten a, b, c und die Parameter x des ersten Punktepaares genügen noch Gleichung (5). In diesen beiden Fällen ist

jedesmal die Spitzentangente zugleich Rückkehrkante, so daß sich in diesen beiden Punkten 5 benachbarte Ebenen der Schar (1) oder 4 benachbarte Erzeugende schneiden.

Auf algebraischem Wege würde die Gleichung der Rückkehrkante aus der Bemerkung gewonnen werden, daß Gleichung (5) von § 2 für eine 3fache Wurzel λ die Form annimmt:

$$a\,(z-\lambda)^3\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)=0.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten dieser Gleichung und jener in § 2 findet man, daß sich die 3 symmetrischen Funktionen

$$\alpha+\beta+\gamma,\quad \alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma,\quad \alpha\beta\gamma$$

rational durch λ in der Weise ausdrücken, daß die 3 einfachen Wurzeln α, β, γ als Wurzeln der Gleichung

$$128\,\lambda^5\varrho^3+(144\,\lambda^6+240\,\lambda^4+5\,\lambda^3-85\,\lambda^2-48)\,\varrho^2$$
$$+16\,\lambda\,(3\,\lambda^6+5\,\lambda^4-15\,\lambda^2-9)\,\varrho-128\,\lambda^2=0$$

erscheinen.

Zur weiteren Orientierung über die Gestalt der Diskriminantenfläche sollen die Schnitte derselben mit den Koordinatenebenen $c=0$, $b=0$, $a=0$ bestimmt werden. Die Eliminationsresultate von x aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich auf die Formen bringen:

$$S_{ab}\equiv[(4\,(a^2+b^2)-1)^3-27\,a^2]\cdot[a^2+b^2]^2$$
$$S_{ac}\equiv[a^2\,(1+8\,a^2+9\,c^2+42\,c)+4\,c\,(1+3\,c)^3]^2\,[a^2-(c-1)^2]$$
$$S_{bc}\equiv[4\,c\,(1-c)-b^2]^2\cdot[4\,b^2-(1+3\,c)^2]^3.$$

Sämtliche 3 Gruppen von Schnitten stellen demnach zerfallende Kurven dar, wie es sein muß.

S_{ab} zerfällt in eine Epizykloide und in ein imaginäres Paar von Doppelgeraden;

S_{ac} enthält eine ebene Doppelkurve 4^{ter} Ordnung der Diskriminantenfläche und 2 Tangenten an dieselbe, welche im zweiten der obenerwähnten Punktepaare die Kurve berühren. Die Tangenten sind die den Parametern $x=\pm\frac{\pi}{2}$ entsprechenden Erzeugenden;

S_{bc} zerfällt in eine Ellipse, welche eine ebene Doppelkurve der Diskriminantenfläche ist, und in zwei Tangenten an dieselbe, welche den ebenen Bestandteil der Rückkehrkante darstellen und im ersten der obenerwähnten Punktepaare die Ellipse berühren.

Durch die Berührpunkte der Spitzentangenten der Rückkehrkante mit den beiden Bestandteilen der Doppelkurve der Diskriminantenfläche in der ac- bzw. bc-Koordinatenebene werden diese Kurven in je 2 Stücke getrennt. Diejenigen Stücke der beiden Kurven, welche den Koordinatenanfangspunkt enthalten, verlaufen nicht auf der Diskriminantenfläche. Sie sind der Ort der Werte $b = 0$, a, c bzw. $a = 0$, b, c, für welche Gleichung (1) zwei zusammenfallende Wurzeln

$$|\sin x| > 1 \text{ bzw. } |\cos x| > 1$$

besitzt. In den Punkten dieser isolierten Teile schneiden sich konjugiert imaginäre Erzeugende der Fläche, welche den Parameterwerten $\frac{\pi}{2} \pm ix$ bzw. $\pm ix$ entsprechen. Wir werden auf pag. 17 auf diese ebenen Doppelkurven zurückkommen.

Die Untersuchung der etwa noch vorhandenen weiteren Teile der Doppelkurve der Diskriminantenfläche könnte unmittelbar an die Definition derselben als Ort der Schnittpunkte zweier nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Erzeugenden der Fläche angeknüpft werden, etwa durch Betrachtung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
&\sin x_1 - a\cos 2x_1 + b\sin 2x_1 + c\sin 3x_1 = 0\\
&\cos x_1 + 2a\sin 2x_1 + 2b\cos 2x_1 + 3c\cos 3x_1 = 0\\
&\sin x_2 - a\cos 2x_2 + b\sin 2x_2 + c\sin 3x_2 = 0\\
&\cos x_2 + 2a\sin 2x_2 + 2b\cos 2x_2 + 3c\cos 3x_2 = 0.
\end{aligned}$$

Die Resultante dieses Systems ist eine symmetrische Beziehung zwischen x_1 und x_2. Die Schnittpunkte derjenigen Erzeugenden, welche zu der Gesamtheit der reellen einander ungleichen Parameter x_1 und x_2 gehören, für welche die Resultante verschwindet, liefert den auf der Fläche verlaufenden Teil der Doppelkurve, und der isolierte Teil derselben wird erhalten als Gesamtheit der Schnittpunkte je zweier Erzeugenden, welche zu zwei konjugiert imaginären Parametern x_1 und x_2 gehören, denen ein obiges Gleichungssystem befriedigendes Wertesystem a, b, c entspricht. Im ersten Fall ist der Quotient $\frac{x_1}{x_2}$ reell, im zweiten Fall komplex und hat den absoluten Betrag $+1$, oder reell und hat den Wert -1. Wir haben nicht nötig, diese Betrachtungen durchzuführen. Wir bemerken, daß der isolierte Teil der Doppelkurve von dem auf der Fläche ver-

laufenden durch die Spitzen der Rückkehrkante getrennt wird, die wir bereits berechnet haben und stellen einfacher die Gleichung der Doppelkurve mit Zuhilfenahme der Gleichung (5), § 2 dar.

Erfüllen die Koordinaten a, b, c die Gleichung der Doppelkurve der Diskriminantenfläche, so nimmt jene Gleichung die Form an

$$a(z-\lambda_1)^2(z-\lambda_3)^2(z-\lambda_5)(z-\lambda_6)=0. \tag{7}$$

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\lambda_1+\lambda_3=u, \qquad \lambda_5+\lambda_6=w,$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_3=v, \qquad \lambda_5\cdot\lambda_6=z$$

und erhalten durch Koeffizientenvergleichung

$$\begin{aligned}
2u+w &= \frac{2(1-2b+3c)}{a}\\
u^2+2v+2uw+z &= -5\\
2vu+4wv+2uz+(u^2-2v)w &= \frac{4(1-5c)}{a}\\
2uvw+z\cdot(u^2+2v)+v^2 &= -5\\
v^2w+2uvz &= \frac{2(1+2b+3c)}{a}\\
v^2z &= 1.
\end{aligned}$$

Nach Substitution der Werte von z und w aus der letzten bzw. ersten Gleichung in die übrigen ergibt sich durch Subtraktion der vierten Gleichung von der mit w multiplizierten zweiten Gleichung

$$u^2=-v\frac{v^2+6v+1}{v^2+v+1},$$

welche Beziehung den Zusammenhang zwischen den Parametern λ_1 und λ_3 der sich längs der Doppelkurve schneidenden Erzeugenden ausdrückt.

Mit Hilfe dieser Beziehung können aus der dritten, vierten und fünften Gleichung a, b, c als Funktionen von v allein berechnet werden. Der räumliche Teil der Doppelkurve läßt sich dann mit Hilfe folgender Parametergleichung darstellen:

$$a=\frac{64}{5}\frac{v^2}{v+1}\frac{(1+v+v^2)\cdot\sqrt{-v(1+v+v^2)(1+6v+v^2)}}{(v^2+1)(v+1)^2(v^4+2v^3+18v^2+2v+1)}$$

$$b=\frac{4}{5}\frac{v-1}{v+1}\frac{(v^2+v+1)(v-1)^2[(v+1)^4+4v^2]}{(v^2+1)(v+1)^2(v^4+2v^3+18v^2+2v+1)}$$

$$c=\frac{1}{5}\frac{(v+1)^4[(v+2)^2-3]^2}{(v^2+1)(v+1)^2\cdot(v^4+2v^3+18v^2+2v+1)}.$$

Die Ordnung der Doppelkurve einer rationalen Developpabeln 6^{ter} Klasse (ohne Doppellinien) ist nach den Plückerschen Formeln 24. Da der ebene Teil der Doppelkurve der Diskriminantenfläche von 6^{ter} Ordnung ist, so wird die Zahl 18 für die Ordnung des räumlichen Teiles derselben, wie sie sich aus obiger Gleichungsform ergibt, der Wirklichkeit entsprechen.

Die Kurve verläuft nur für solche Werte des Parameters v reell, welche den Wurzelradikanden nicht negativ machen.

Da $1 + v + v^2$ stets positiv ist, und die Bedingung

$$\begin{aligned} v &> 0 \\ 1 + 6v + v^2 &< 0 \end{aligned}$$

nicht möglich ist, so ergeben sich aus der Forderung

$$\begin{aligned} v &< 0 \\ 1 + 6v + v^2 &> 0 \end{aligned}$$

für v die Grenzen

$$-0{,}17158\ldots = -3 + 2\sqrt{2} < v < 0$$

$$-\infty \leqq v \leqq -3 - 2\sqrt{2} = -5{,}82842\ldots$$

Das Polynom 4^{ten} Grades im Nenner der obigen Ausdrücke, nämlich

$$v^4 + 2v^3 + 18v^2 + 2v + 1 \equiv (v^2 + v)^2 + (v + 1)^2 + 16v^2$$

verschwindet für kein reelles v, und $v = -1$ liefert keinen reellen Punkt der Doppelkurve. Die Doppelkurve verläuft demnach ganz im Endlichen, und, wie sich aus dem Folgenden ergibt, nirgends isoliert. Die Grenzwerte der v liefern die Punkte

$$\text{(I)}\quad \begin{matrix} v = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} a = 0 \\ b = -0{,}8 \\ c = +0{,}2 \end{matrix}\right. \qquad \text{(II)}\quad \begin{matrix} v = \infty \\ x_1 = \pi \\ x_3 = \pi \end{matrix}\left\{\begin{matrix} a = 0 \\ b = +0{,}8 \\ c = +0{,}2 \end{matrix}\right.$$

$$\text{(III)}\quad \begin{matrix} v = -3 + 2\sqrt{2} \\ x_1 = +\frac{\pi}{4} \\ x_3 = -\frac{\pi}{4} \end{matrix}\left\{\begin{matrix} a = 0 \\ b = -0{,}942\ldots = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ c = +\frac{1}{3} \end{matrix}\right.$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{matrix} v = -3 - 2\sqrt{2} \\ x_1 = \frac{3\pi}{4} \\ x_3 = -\frac{3\pi}{4} \end{matrix}\left\{\begin{matrix} a = 0 \\ b = +0{,}942\ldots \\ c = +\frac{1}{3}. \end{matrix}\right.$$

Das erste Punktepaar ist bereits öfter erwähnt worden. Der räumliche Teil der Rückkehrkante bildet dort Spitzen, während der ebene Teil der Rückkehrkante mit den Spitzentangenten zusammenfällt. Da von jeder Rückkehrkantenspitze ein auf der Fläche verlaufender Zweig der Doppelkurve ausgeht, so bildet in jedem dieser Punkte aus Gründen der Symmetrie der nicht isolierte Teil der räumlichen Doppelkurve eine Spitze. Bereits auf pag. 13 haben wir erkannt, daß der elliptische Teil der Doppelkurve in der bc-Ebene, den ebenen Teil der Rückkehrkante berührend, von denselben Punkten ab auf der Fläche verläuft.

In den beiden anderen der obigen Punkte hat die Doppelkurve der Diskriminantenfläche Doppelpunkte. Ein Doppelpunkt der Doppelkurve entsteht im allgemeinen da, wo sich 2 in derselben Tangentialebene der Fläche liegende Erzeugende derselben schneiden. Um die Doppelpunkte zu ermitteln, bemerken wir, daß Gleichung (1) für die Parameterpaare

$$x = 0,\ \pi; \quad x = \pm\frac{\pi}{4}; \quad x = \pm\frac{3\pi}{4}$$

ein und dieselben Ebenen darstellt. Das erste Parameterpaar entspricht der bc-Koordinatenebene. Die beiden Erzeugenden in dieser Ebene sind Rückkehrkanten und schneiden sich im Punkt $a = b = 0$, $c = -\frac{1}{3}$, in welchem die Doppelkurve in der ac-Koordinatenebene eine Spitze bildet, wie aus der Gleichung dieser Kurve auf pag. 13 unmittelbar ersichtlich ist.

Die den beiden anderen Parameterpaaren entsprechenden Erzeugenden liegen in den Tangentialebenen $\sqrt{2}\cdot b + c - 1 = 0$ bzw. $-\sqrt{2}b + c - 1 = 0$ und schneiden sich im zweiten der obigen Punktepaare. In denselben Punkten berührt auch der elliptische Zweig der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene diese Tangentialebenen. Wie wir auf pag. 19 sehen werden, bildet die räumliche Doppelkurve in diesen Punkten keine Spitzen. Da sie dort auch keine Doppelpunkte, welche dreifachen Punkten der gesamten Doppelkurve entsprechen würden, besitzt, so durchsetzt die räumliche Doppelkurve den ebenen elliptischen Teil aus Gründen der Symmetrie senkrecht und berührt natürlich in diesen Punkten obige Tangentialebenen. Die Umgebung dieser Doppelpunkte der Doppelkurve der Diskriminantenfläche kann daher anschaulich durch zwei aufeinander gelegte Blätter ersetzt werden, die längs zweier sich

senkrecht schneidender Geraden aufgeschnitten und kreuzweise miteinander längs der Einschnitte verbunden sind. Ein Analogon zu denjenigen Punkten einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche, in welchen sich zwei Verzweigungslinien senkrecht durchkreuzen. Die beiden im Doppelpunkt sich schneidenden Erzeugenden der Fläche verlaufen jede von ihnen vor und nach dem Schnitt in ein und demselben „Blatt".

Die dem ersteren Punktepaar entsprechenden Spitzen der Doppelkurve entstehen dadurch, daß von diesen Punkten jedesmal drei Zweige der Rückkehrkante der Fläche ausgehen und in den Punkten selbst sich gegenseitig berühren. Allgemein entsteht eine Spitze der Doppelkurve einer abwickelbaren Fläche, wenn die Rückkehrkante derselben einen anderen Flächenteil durchstößt. Um diese Punkte in unserem Fall zu bestimmen, bemerken wir, daß für die Koordinaten a, b, c derselben Gleichung (5) von § 2 eine dreifache Wurzel und eine Doppelwurzel besitzen muß.

Da sich die Doppelwurzeln dieser Gleichung aus

$$\varrho^2 - u\varrho + v = 0 \tag{8}$$

und die einfachen Wurzeln derselben aus

$$\varrho^2 - w\varrho + z = 0 \tag{9}$$

bestimmen, so werden beide Gleichungen im Falle einer Spitze der Doppelkurve eine gemeinschaftliche Wurzel besitzen. Da sich u, w, z durch v allein ausdrücken lassen, so können diese Gleichungen ersetzt werden durch

$$\sqrt{v^2+v+1}\,\varrho^2 - \sqrt{-v(v^2+6v+1)}\,\varrho + v\sqrt{v^2+v+1} = 0 \tag{8a}$$

und

$$2v^2\sqrt{-v(v^2+6v+1)(v^2+v+1)}\,\varrho^2 + (v+1)(v^4+6v^2+1)\varrho + \\ + 2\sqrt{-v(v^2+6v+1)(v^2+v+1)} = 0. \tag{9a}$$

Die Resultante derselben ist

$$v(v^2+v+1)(v^2-1)^2(v^6+8v^5+11v^4+32v^3+11v^2+8v+1).$$

$v=0$ entspricht der gemeinschaftlichen Wurzel $\varrho=0$, also $x=0$; für $v=\infty$ haben beide Gleichungen die gemeinschaftliche Wurzel $\varrho=\infty$, also $x=\pi$. Diese Parameterwerte entsprechen den schon erwähnten Spitzen des räumlichen Zweiges. Die beiden sich

aus (8 a) ergebenden Doppelwurzeln fallen mit einer der einfachen zusammen.

Das reziproke Polynom 6^{ten} Grades verschwindet für 2 reelle v:

$$v_1 = -7{,}055635 \ldots$$
$$v_2 = \frac{1}{v_1} = -0{,}141735 \ldots$$

Die dazu gehörigen 4 Durchstoßpunkte der Rückkehrkante sind:

$$\begin{cases} a = \pm 0{,}0461 \ldots \\ b = \pm 0{,}9407 \ldots \\ c = +0{,}3215 \ldots \end{cases}$$

Für diese 4 Koeffiziententripel besitzt demnach Gleichung (5), § 2 eine dreifache Wurzel, eine Doppelwurzel und eine einfache Wurzel, die sich sämtlich aus (8 a) bzw. (9 a) berechnen. Weitere Singularitäten hat der räumliche Zweig der Doppelkurve nicht. Auch erkennt man, daß er keinen isolierten Teil besitzt. Eine schematische Darstellung eines der beiden voneinander getrennten Teile desselben ist Fig. 7 d auf Tafel II des Anhanges, welche allerdings bezüglich der Bezeichnung für eine andere später zu besprechende Fläche Geltung hat. Den Punkten A bzw. B entsprechen die Werte

$$v = -0{,}141735 \ldots$$
$$b = -0{,}9407 \ldots$$
$$c = +0{,}3215 \ldots$$
$$a = \pm 0{,}0461 \ldots$$

und dem Punkt C bzw. dem Doppelpunkt das Wertesystem (I) bzw. (III) auf pag. 16.

Die Figg. 1, 2, 2a und 3 des Anhanges dienen dazu, eine Vorstellung von dem Aussehen der soeben diskutierten Diskriminantenfläche[1]) zu geben. Sämtliche Figuren stellen Projektionen von Flächenteilen auf die 3 Koordinatenebenen dar, welche wir mit Zuhilfenahme der Projektionen der Erzeugenden der Fläche auf die Koordinatenebenen konstruiert haben, und zwar derjenigen Erzeugenden, welche den Parameterwerten $x = 0$, $\pm \frac{\pi}{36}$, $\pm \frac{2\pi}{36}$ etc. entsprechen.

[1]) Die Figuren stellen die Fläche homogen transformiert dar. In der Richtung der b- und a-Achse ist sie um die Hälfte, in der Richtung der c-Achse um $^2/_3$ der ursprünglichen Größe homogen zusammengedrückt dargestellt.

Die Gleichungen derselben lassen sich in der Form schreiben

$$a[5\cos x + \cos 5x] + b[5\sin x - \sin 5x] + 4\sin 2x - 2\sin 4x = 0$$
$$4b + c[5\cos x + \cos 5x] + 3\cos x - \cos 3x = 0$$
$$4a - c[5\sin x - \sin 5x] + 3\sin x - \sin 3x = 0.$$

Sie sind mit den Zahlen versehen, welche ihrem Parameter x, in Graden ausgedrückt, entsprechen. Bezüglich der Fig. 3 sei hier bemerkt, daß die Projektion der Rückkehrkante auf die bc-Koordinatenebene die den Parametern

$$x = \pm\frac{\pi}{4}, \quad x = \pm\frac{3\pi}{4}$$

entsprechenden Erzeugenden in derselben Projektion als Wendetangenten besitzt. Die stark ausgezogenen Kurven stellen Schnitte der Fläche mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen dar und sind als Niveaulinien in gleichen Abständen von den betreffenden Koordinatenebenen aufzufassen. Außerdem sind in Fig. 1 noch einige Schnittkurven eingetragen, welche durch bestimmte Flächensingularitäten hindurchgehen. Die Gleichungen dieser Schnittkurven lassen sich in Parameterform leicht mit Hilfe der Überlegung aufstellen, daß jeder Punkt derselben als Schnittpunkt der zum Parameter x gehörigen Erzeugenden der Fläche und der zu demselben Parameter x gehörigen Kurventangente, die durch Gleichung (1) dargestellt ist, aufgefaßt werden kann. Wir erhalten für die Gleichungen der Schnitte

$$\left\{\begin{aligned} a &= -\sin x\,[\sin^2 x + c(\cos 3x\,\cos x - 1)] = -\frac{8\lambda^3}{(1+\lambda^2)^5}\cdot \\ &\quad \cdot[(1+\lambda^2)^2 - c(5 - 6\lambda^2 + 5\lambda^4)] \\ b &= \frac{\cos x}{2}\left[(2\cos^2 x - 3) - c\frac{\cos 5x + 5\cos x}{2\cos x}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^5}[(1+10\lambda^2+\lambda^4)(1+\lambda^2)^2 + c(3-12\lambda^2+98\lambda^4-12\lambda^6+3\lambda^8)] \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} c &= \frac{1}{4\cos^2 x + 1}\left(1 + \frac{a}{\sin^3 x}\right) = \frac{(1+\lambda^2)^2}{5 - 6\lambda^2 + 5\lambda^4}\cdot\left(1 + a\frac{(1+\lambda^2)^3}{8\lambda^3}\right) \\ b &= \frac{-\cos x}{4\cos^2 x + 1}\left(4 + a\frac{\cos 5x + 5\cos x}{4\sin^3 x\,\cos x}\right) \\ &= -\frac{1-\lambda^4}{5 - 6\lambda^2 + 5\lambda^4}\left(4 + a\frac{3 - 12\lambda^2 + 98\lambda^4 - 12\lambda^6 + 3\lambda^8}{(1+\lambda^2)\cdot 16\lambda^3}\right) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{-2\sin^3 x\cos x}{3[\cos 5x + 5\cos x]}\left[8 + \frac{2b}{\cos x}(4\cos^2 x + 1)\right] \\ &= \frac{-8\lambda^3(1+\lambda^2)}{3[3 - 12\lambda^2 + 98\lambda^4 - 12\lambda^6 + 3\lambda^8]}\left[8 + b\frac{2[5 - 6\lambda^2 + 5\lambda^4]}{1-\lambda^4}\right] \\ c &= \frac{2\cos x}{\cos 5x + 5\cos x}\left(2\cos^2 x - 3 - b\cdot\frac{2}{\cos x}\right) \\ &= \frac{-(1+\lambda^2)^4}{3 - 12\lambda^2 + 98\lambda^4 - 12\lambda^6 + 3\lambda^8}\left[\frac{1 + 10\lambda^2 + \lambda^4}{(1+\lambda^2)^2} + b\frac{2(1+\lambda^2)}{1 \quad \lambda^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Die erste von diesen 3 Gruppen Schnittkurven definiert geschlossene Kurven, welche für $-0{,}6 > c > +0{,}2$ 6 reelle Spitzen haben. Für andere Werte von c sind nur 2 Spitzen reell. Man vergleiche Fig. 1. Die Kurven können aus der sich für $c = 0$ ergebenden Schnittkurve in der ab-Koordinatenebene entstanden gedacht werden, und zwar in der Weise, daß der durch $[a^2 + b^2]^2 = 0$ definierte Punkt derselben für größere bzw. kleinere Werte von c in 2 getrennte auf der b- bzw. a-Achse gelegene isolierte Doppelpunkte der betreffenden Projektionen übergeht, welche für $c = +0{,}2$ bzw. für $c = -0{,}6$ unter Bildung je zweier reeller Spitzen der betreffenden Projektion aufhören, isoliert zu sein.

Die Kurven der zweiten Gruppe, welche aus der doppelt zu zählenden Ellipse in der bc-Ebene und den beiden Tangenten $\pm 2b + 3c + 1 = 0$ an dieselbe entstehen, haben für $0 < |a| < 1{,}6$ zwei, und für absolut größere Werte von a 4 reelle Spitzen. Sie bestehen aus 2 getrennten Teilen, von welchen jeder sich in zwei Ästen in das Unendliche erstreckt. Man vergleiche Fig. 3.

Auch die Kurven, welche die 3$^{\text{te}}$ Gruppe der Gleichungen definiert, bestehen aus zwei getrennten Zweigen. Sie entstehen aus der doppelt zählenden Kurve 4$^{\text{ter}}$ Ordnung in der ac-Ebene und den beiden Tangenten an dieselbe: $\pm a - c - 1 = 0$. Für $0 < |b| < 0{,}8$ sind 4 Spitzen reell und für absolut größere Werte von b haben die Schnitte 6 reelle Spitzen. In ihrer Projektion auf die ac-Koordinatenebene haben sie jene Tangenten zu gemeinschaftlichen Asymptoten. Jeder Zweig erstreckt sich längs derselben in 2 Ästen in das Unendliche. Figg. 2 und 2a.

Der Vergleich der beiden dem Parameter $b = \frac{3}{4}$ entsprechenden Schnitte in den Figg. 2 und 2a läßt erkennen, daß der räumliche Teil der Doppelkurve im Verhältnis zum ebenen Teil

derselben eine äußerst geringe Ausdehnung besitzt, welche es nicht erlaubte, denselben in den Figg. 1, 2 und 3 zur Anschauung zu bringen. Nach der ausführlichen Diskussion der Singularitäten der Diskriminantenfläche brauchen wir uns wohl nicht weiter über den Zusammenhang derselben mit den Extremen der durch die Funktion

$$y = \cos x + \frac{a}{2}\sin 2x + \frac{b}{2}\cos 2x + \frac{c}{3}\cos 3x$$

in der xy-Ebene dargestellten Kurve zu verbreiten, mit welch letzteren wir uns im folgenden § 4 beschäftigen wollen.

§ 4.

Die analytische und graphische Bestimmung der Anzahl der reellen Extreme x der Funktion $y = \cos x + \frac{a}{2}\sin 2x + \frac{b}{2}\cos 2x + \frac{c}{3}\cdot\cos 3x$ im Intervall $-\pi \leq x < +\pi$.

Die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung (5), § 2 gibt die Anzahl der reellen Extreme der Funktion y an. Die Gleichung hat, wie wir gesehen haben, für reelle Koeffizienten a, b, c zwei, vier oder sechs reelle Wurzeln. Das Vorzeichen der Diskriminante dieser Gleichung reicht daher allein nicht aus, um die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung zu bestimmen, sondern zeigt nur an, ob die Gleichung 4 reelle Wurzeln besitzt oder nicht. Wir geben zunächst den Ausdruck für die Diskriminante in entwickelter Form an. Aus Symmetrieeigenschaften erkennt man zunächst, daß die Diskriminante höchstens aus 90 Gliedern bestehen kann. Davon sind 85 wirklich vorhanden. Die Koeffizienten von c, c^9, $c\,a^4\,b^4$, b^2, a^2 verschwinden. Durch die im vorigen Paragraphen angegebenen Schnitte der Diskriminantenfläche mit den Koordinatenebenen sind von den 85 Gliedern 66 bestimmt. Die anderen 19, alle 3 Koeffizienten a, b, c enthaltende Glieder bekommen wir, wenn wir den in Salmon-Fiedlers „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen“, Leipzig 1877, pag. 344 und 345 gegebenen Ausdruck für die Diskriminante der allgemeinen Gleichung 6^{ten} Grades auf den speziellen Fall der Gleichung (2), § 2 anwenden. Diese Gleichung eignet sich vor allen anderen ihrer Einfachheit halber zur Berechnung der Diskriminante. Die Diskriminanten der allgemeinen aus

dieser Gleichung durch die Substitution (4), § 2 hervorgehenden Gleichungen haben den Faktor $[e^{i\gamma}(\alpha - \beta)]^{15}$ mehr als die Diskriminante der Gleichung (2), § 2.

Wenn S_{ab}, S_{ac}, S_{bc} wiederum die Ausdrücke auf pag. 13 bedeuten, so läßt sich der Ausdruck für die Diskriminante D, abgesehen von Zahlenfaktoren, in der Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
D = S_{ab} + S_{ac} + S_{bc} \quad & - 64\,a^{10} \quad - 64\,b^{10} \quad + 11664\,c^{10} \\
& + 320\,a^6 b^2 c^2 \quad + 320\,b^6 a^2 c^2 \quad + 270\,c^6 a^2 b^2 \\
& + 480\,a^4 b^4 c^2 \quad + 23745\,b^4 c^4 a^2 \quad - 23130\,c^4 a^4 b^2 \\
& + c[1600\,a^6 b^2 - 1600\,b^6 a^2] + c^3[-5400\,a^4 b^2 - 7100\,a^2 b^4] - 67500\,c^5 a^2 b^2 \\
& + 1676\,a^4 b^2 c^2 + 1726\,b^4 a^2 c^2 - 126\,c^4 a^2 b^2 + 48\,a^8 + 48\,b^8 - 15552\,c^8 \\
& + c\,[-456\,a^4 b^2 + 564\,a^2 b^4] + 5752\,c^3 a^2 b^2 - 6912\,c^7 \\
& - 14\,a^2 b^2 c^2 + 15\,a^6 - 12\,b^6 + 4320\,c^6 \\
& + 180\,c\,a^2 b^2 + 4608\,c^5 \\
& + a^4 + b^4 + 1600\,c^4 + 256\,c^3 + 16\,c^2,
\end{aligned}
$$

wobei wir, wie ersichtlich, nach gleich hohen Exponentensummen geordnet haben. Dieser Ausdruck für D stellt die Diskriminante der Gleichung (5), § 2 in der Form dar, daß das positive Zeichen dem Gliede zukommt, welches die fünfte Potenz des Produktes der beiden äußersten Koeffizienten jener Gleichung enthält. Daraus folgt (Salmon-Fiedlers Vorlesungen, pag. 312), daß die Gleichung 6 oder 2 reelle Wurzeln besitzt, sobald diese Diskriminante negativ ist und 4 reelle Wurzeln bei positiver Diskriminante hat. Die Gesamtheit der Koeffizienten a, b, c, für welche ersteres der Fall ist, sind Koordinaten der Punkte der Räume R_0 und R_2, von welchen in der Einleitung die Rede war. Diese Räume hängen offenbar in der Doppelkurve und ihren Singularitäten miteinander zusammen und die Kriterien, welche gestatten, die genaue Anzahl der Wurzeln für bestimmte Werte von a, b, c zu ermitteln, stellen geometrisch immer Flächen dar, von denen immer eine durch die Doppelkurve der Diskriminantenfläche hindurchgeht. Im Falle der Sturmschen Funktionen geht die vorletzte derselben durch die Doppelkurve der Diskriminantenfläche, aber auch durch die Rückkehrkante derselben hindurch. Da die letztere für die Trennung der Gebiete R_0 und R_2 nicht in Betracht kommt, so können in vielen Fällen schon deshalb die Sturmschen Funktionen durch einfachere, oft durch alleinige

Untersuchung der Diskriminantensingularitäten, ersetzt werden[1]). Der Erfolg derartiger Untersuchungen hängt namentlich von der Komplikation der Doppelkurve der Diskriminantenfläche ab. Da in unserem Falle die Doppelkurve von der 24^{sten} Ordnung ist und in 3 Kurven 2^{ter}, 4^{ter} und 18^{ter} Ordnung zerfällt, so würde die Schwierigkeit zum Teil darin bestehen, durch die Raumkurve 18^{ter} Ordnung eine Fläche von niederer Ordnung als die vorletzte Sturmsche Funktion, also von niederer als 8^{ter} Ordnung, hindurchzulegen. Der Verfasser dieser Arbeit ist bei der direkten Lösung dieser Aufgabe zu keinem Ziel gelangt, und läßt es dahingestellt, ob die Aufgabe bei der Komplikation der dabei auftretenden Ausdrücke überhaupt lösbar ist. Von den Sturmschen Funktionen verschiedene Kriterien für die Realität der Wurzeln der allgemeinen Gleichung 6^{ten} Grades finden sich in Salmon-Fiedlers „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen", p. 356, und für spezielle Gleichungen 6^{ten} Grades in den Math. Annalen, Bd. XX von A. Brill, sowie in der Dissertation von G. Kerschensteiner (München 1888) aufgestellt. Die ersten sind im Grade höher als die Sturmschen Kriterien, und die letzteren sind auf den Fall der Gleichung (5), § 2 nicht gut anwendbar.

Um Kriterien für die Anzahl der reellen Wurzeln dieser Gleichung auf bequeme Art aufzustellen, ist es vorteilhafter, das allgemeine Verfahren von Hermite[2]) anzuwenden, welches darauf beruht, zu einer gegebenen Gleichung n^{ten} Grades eine quadratische Form von $n-1$ Variabeln anzugeben und diese von ihm „Bezoutiante" genannte Form durch reelle und lineare Substitutionen in eine Summe von Quadraten zu verwandeln. Die Anzahl der mit positiven Koeffizienten auftretenden Quadrate, welche infolge des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen für jede derartige Umformung in eine Summe von Quadraten konstant bleibt, gibt genau die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades an.

Im Falle der allgemeinen Gleichung 6^{ten} Grades:

$$a_0 x^6 + 6 a_1 x^5 + 15 a_2 x^4 + 20 a_3 x^3 + 15 a_4 x^2 + 6 a_5 x + a_6 = 0$$

erhalten wir für die Bezoutiante den Ausdruck:

---

[1]) Vgl. Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie vom 14. Februar 1878; auch die sich darauf stützende Dissertation von Faerber, „Herleitung von Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln von Gleichungen aus der Beschaffenheit ihrer Diskriminantenmannigfaltigkeit". Berlin 1889.

[2]) Vgl. Sylvester, Phil. Trans. 1853; Hermite, Crelles Journal, Bd. 52 (1856).

$$5[a_0a_2-a_1^2]x_1^2+10[a_0a_4+4a_1a_3-5a_2^2]x_2^2$$
$$+5[a_4a_6-a_5^2]x_5^2+10[a_2a_6+4a_3a_5-5a_4^2]x_4^2+[a_0^2+24a_1a_5+75a_2^2-100a_3^2]x_3^2$$

$$+20[a_0a_3-a_2a_1]x_1x_2+20[a_0a_4-a_3a_1]x_1x_3+10[a_0a_5+9a_4a_1-10a_2a_3]x_2x_3$$
$$+20[a_3a_6-a_4a_5]x_4x_5+20[a_2a_6-a_3a_5]x_3x_5+10[a_1a_6+9a_2a_5-10a_4a_3]x_3x_4$$

$$+10[a_0a_5-a_4a_1]x_1x_4$$
$$+10[a_1a_6-a_2a_5]x_2x_5+2[a_0a_6-a_1a_5]x_1x_5+2[a_0a_6+24a_1a_5-25a_2a_4]x_2x_4,$$

welcher, auf Gleichung (5), § 2 angewendet, die Form annimmt:

$$\sum A_{i,k}\,x_i\,x_k \quad (i,\,k=1,\,2,\,3,\,4,\,5)$$
$$=-5[3a^2+(1-2b+3c)^2]x_1^2+8[-10a^2+3(1-5c)(1-2b+3c)]x_2^2$$
$$-5[3a^2+(1+2b+3c)^2]x_5^2+8[-10a^2+3(1-5c)(1+2b+3c)]x_4^2+12[7a^2-8b^2-57c^2+42c-1]x_3^2$$

$$+8a[-7+15c+5b]x_1x_2+12[-5a^2-(1-5c)(1-2b+3c)]x_1x_3+240a[2c-b]x_2x_3$$
$$+8a[-7+15c-5b]x_4x_5+12[-5a^2-(1-5c)(1+2b+3c)]x_3x_5+240a[2c+b]x_3x_4$$

$$+40a[-1-b-3c]x_1x_4$$
$$+40a[-1+b-3c]x_2x_5+2[9a^2-(1+3c)^2+4b^2]x_1x_5+16[3[(1+3c)^2-4b^2]-2a^2]x_2x_4.$$

Man sieht zunächst, daß die Bezoutiante ungeändert bleibt, wenn gleichzeitig a mit $-a$ und x_1, x_5, x_3 mit $-x_1$, $-x_5$, $-x_3$ vertauscht werden. Ebenso bleibt sie ungeändert, wenn b mit $-b$, und gleichzeitig die Indizes 1 mit 5, 2 mit 4 vertauscht werden.

Jacobi[1]) hat eine lineare Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten gegeben, mit Hilfe derer die quadratische Form $\sum A_{i,k}\,x_i\,x_k$ $(i,k=1,2\ldots n)$ nach Ausführung der Transformation in der Form erscheint

$$\sum A_{i,k}\,x_i\,x_k=\frac{y_1^2}{D_1}+\frac{y_2^2}{D_1D_2}+\frac{y_3^2}{D_2D_3}+\cdots+\frac{y_n^2}{D_{n-1}D_n},$$

wobei die D_ν Hauptunterdeterminanten der Diskriminante der quadratischen Form darstellen, nämlich

$$D_1=A_{11},\quad D_2=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix},\ \text{etc.}$$

Ist die qnadratische Form die Bezoutiante einer algebraischen Gleichung $n+1^{\text{ten}}$ Grades, so fällt die Invariante D_n der Bezoutiante mit der Diskriminante der Gleichung zusammen, und die D_ν sind

[1]) Crelles Journal, Bd. 53 (1857), pag. 270.

die Leitglieder der Sturmschen Funktionen im gewöhnlichen Sinn. Die Diskriminante einer Gleichung 6^{ten} Grades kann daher mit Hilfe einer Determinante 5^{ten} Grades und die Leitglieder der Sturmschen Funktionen können aus Determinanten 2^{ten}, 3^{ten} und 4^{ten} Grades berechnet werden[1]). Die reduzierte quadratische Form hat offenbar so viele negative bzw. positive Koeffizienten, als in der Reihe

$$1,\ D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ D_5$$

Zeichenwechsel bzw. Zeichenfolgen auftreten.

Es liegt zunächst die Frage nahe, ob sich die Sturmschen Funktionen für den speziellen Fall der Gleichung (5), § 2 vereinfachen lassen. Der Verfasser hat sich vergeblich bemüht, die Leitglieder der Sturmschen Funktionen im gewöhnlichen Sinn, welche zu jener Gleichung gehören, zu vereinfachen. Während die gleich Null gesetzte Diskriminante derselben eine bezüglich der ac- und bc-Koordinatenebene symmetrische Fläche darstellt, besitzen die durch $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, ... $D_4 = 0$ definierten Flächen bloß Symmetrie bezüglich der bc-Koordinatenebene, sind also zur Trennung der bezüglich zweier Koordinatenebenen symmetrischen Räume schlechthin unbrauchbar.

Substituieren wir in $\sum A_{i,k}\, x_i\, x_k\ (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ 5)$

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_2 & x_4 &= \xi_4 \\ x_2 &= \xi_3 & x_5 &= \xi_1, \\ x_3 &= \xi_5 \end{aligned}$$

so geht die quadratische Form über in

$$\sum B_{i,k}\, \xi_i\, \xi_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ 5),$$

welche natürlich bis auf diese andere Bezeichnungsweise der Variabeln x_i identisch ist mit der Bezontiante. Wenden wir auf

$$\sum B_{i,k}\, \xi_i\, \xi_k$$

die Jacobische Transformation an, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form

$$\frac{y_1'^2}{D_1'} + \frac{y_2'^2}{D_1' D_2'} + \cdots + \frac{y_5'^2}{D_4' D_5'},$$

[1]) Die Berechnung der Sturmschen Funktionen aus den von Cayley in Liouv. Journ. Bd. 13, pag. 270 zuerst aufgestellen Determinanten für dieselben würden die Entwicklung von Determinanten 10^{ten} Grades für die Diskriminante und 8^{ten}, 6^{ten}, 4^{ten}, 2^{ten} Grades für die Sturmschen Funktionen erfordern.

wobei sich D_2' und D_4' sowohl bei der Vertauschung von a mit $-a$ als auch von b mit $-b$ nicht ändern, während D_1' und D_3' nur bei der ersteren Vertauschung ungeändert bleiben. Diese Ausdrücke sind demnach einfacher als die Leitglieder D_1, D_2, ... D_4 der gewöhnlichen Sturmschen Funktionen.

Für die D_i' erhalten wir:

$$D_1' = -5[3a^2 + (1+2b+3c)^2]$$

$$D_2' = 6a^4 + 16b^4 + 22a^2b^2 + (1+3c)^2[(1+3c)^2 + 7a^2 - 8b^2]$$

$$\begin{aligned} D_3' = {} & 12(1-5c)(1-2b+3c)[(1+3c)^2 - 4b^2] - \\ & -240a^6 + 12a^4\{-40b^2 + 4b(15c-23) - 2c(81+100c) + 31\} + \\ & + a^2\{-240b^4 + 48b^3(31+55c) + 48b^2(165c^2+64c+23) + \\ & + 2b(6930c^3 - 2031c^2 - 2224c - 259) - 3(1755c^4 + \\ & + 2754c^3 + 819c^2 - 112c - 48)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4' = {} & 18\{[8a^4 + a^2(1+9c^2+42c) + 4c(1+3c)^3] \cdot [2a^4 + a^2 \cdot \\ & \cdot (21c^2 + 10c - 7) + 27c^4 - 18c^2 - 8c - 1] + \\ & + [(1+3c)^2 - (4b)^2]^3 \cdot [4c^2 - 4c + b^2]\} - \\ & - 288a^6b^2 - 792a^2b^6 + 9a^4b^2[-145 + 394c - 3129c^2] + \\ & + a^2b^4[131 + 7986c + 12600c^2] - 5184a^4b^4 + \\ & + a^2b^2[-361 - 2868c + 13014c^2 - 38988c^3 - 106839c^4] - \\ & - 72c(c-1)(1+3c)^6. \end{aligned}$$

$D_5' = D_5 = D$ (bis auf positive Zahlenfaktoren).

$D_4' = 0$ stellt eine Fläche 8^{ter} Ordnung dar, welche, wie unmittelbar aus obenstehendem Ausdruck ersichtlich ist, die ac-Koordinatenebene nach der auf pag. 13 besprochenen Doppelkurve der Diskriminantenfläche in dieser Ebene und in einer weiteren Kurve 4^{ter} Ordnung schneidet.

Ferner erkennt man aus dem obigen Ausdruck, daß diese Fläche auch durch die ebene elliptische Doppelkurve der Diskriminantenfläche hindurchgeht, und daß das Geradenpaar

$$(1+3c)^2 - (4b)^2 = 0$$

für sie, wie für die Diskriminantenfläche eine Rückkehrkante darstellt. Natürlich enthält sie den räumlichen Teil der Doppelkurve von $D = 0$.

$D_3' = 0$ enthält $1 + 3c - 2b = 0$ als Doppelgerade, schneidet die Ebene $a = 0$ weiter nach den Linien $1 - 5c = 0$ und $1 + 3c + 2b = 0$, und geht durch die Spitzen der Rückkehrkante der Diskriminantenfläche in der ac-Koordinatenebene

$$b = 0, \quad a = \pm 1{,}6, \quad c = -0{,}6$$

hindurch.

D_2' verschwindet für die Koordinaten der Rückkehrkantenspitzen von $D = 0$ in der bc-Koordinatenebene

$$a = 0, \quad b = \pm 0{,}8, \quad c = +0{,}2$$

und für den Schnittpunkt des ebenen Teiles der Rückkehrkante von $D = 0$

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{3}.$$

D_1' verschwindet ebenfalls für diese letzteren Koordinatenwerte.

Soll die Gleichung (5), § 2 lauter reelle Wurzeln besitzen, so darf in der Reihe

$$1, \; D_1', \; D_2', \; D_3', \; D_4', \; D_5'$$

keine Zeichenfolge auftreten.

Da D_1' stets negativ ist, so muß in diesem Fall D_3' und D_5' negativ, D_2' und D_4' positiv sein. Wir erhalten demnach das Kriterium:

Die Funktion

$$y = \cos x + \frac{a}{2}\sin 2x + \frac{b}{2}\cos 2x + \frac{c}{3}\cos 3x$$

hat im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ 4 reelle Extreme, sobald $D_5' \equiv D > 0$ ist, und bei negativem $D_5' \equiv D$ 6 reelle Extreme, sobald

$$D_3' < 0 \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} D_2' \\ D_4' \end{matrix}\right\} > 0$$

ist. Sonst hat sie bei negativer Diskriminante 2 reelle Extreme.

Es sei noch Folgendes bemerkt:

In der Gleichung (8), § 2 fehlt das mittlere Glied. Auch diese Gleichung hätte man ihrer Einfachheit halber in dieser Weise zur Entwicklung von Kriterien verwenden können. Die Diskriminante dieser Gleichung (aus der Bezoutiante berechnet) hat beim Vorhandensein von 2 oder 6 reellen Wurzeln ein positives Vorzeichen. Denken wir uns a, b, c als Funktionen eines Parameters λ, so müssen die Koeffizienten der Gleichung, soll sie lauter reelle Wurzeln

haben, die Eigenschaften einer Sturmschen Reihe besitzen[1]). Da das mittlere Glied fehlt, so müssen daher (für jeden Wert des Parameters λ) die Ausdrücke $5b - 15c + 1$ und $5b + 15c - 1$ das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, wenn die Gleichung 6 reelle Wurzeln und somit y 6 reelle Extreme im genannten Intervall haben soll.

Praktisch sind die im vorstehenden entwickelten Kriterien wegen ihrer Komplikation wenig zu gebrauchen. Man könnte ja versucht sein, Kriterien für die Realität der Wurzeln derartiger trigonometrischer Gleichungen auf undere Weise zu bilden, etwa aus den aus den Formeln

$$\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = 2\sin(nx)\cos x$$
$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos(nx)\cos x$$

hervorgehenden Eigenschaften der Funktionen $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$. Verschwindet eine derartige Funktion, so haben die beiden benachbarten Funktionen entgegengesetztes Zeichen. Man kann diese Eigenschaften benützen, um Reihen aus sinus und cosinus zusammengesetzer Ausdrücke zu bilden, welche ebenfalls die Eigenschaft besitzen, daß wenn einer davon verschwindet, die beiden anderen ententgegengesetztes Zeichen haben. Man kommt aber dabei nie zu einem konstanten Rest, so daß diese Reihen nicht alle Eigenschaften der Sturmschen Reihen besitzen, also die daraus folgenden Schlüsse nicht anwendbar sind.

Es soll nun im Nachfolgenden eine graphische Methode entwickelt werden, welche allerdings eine Projektion der Diskriminantenfläche mit darauf verzeichneten näher zu bestimmenden Kurvensystemen vorgelegt voraussetzt, aber wenn das einmal der Fall ist, für ein gewisses Intervall der Koeffizientenwerte a, b, c die Anzahl der Extreme der Funktion y, sowie die Abszissen und Ordinaten derselben mit leichter Mühe abzulesen gestattet.

Wir führen zunächst eine homogene Deformation des Raumes insofern aus, als wir statt der früheren Koeffizienten a, b, c jetzt $2a$, $2b$, $3c$ schreiben wollen. Auch die Figg. 1, 2, 2a, 3 auf Tafel I stellen die in dem vorausgehenden Paragraphen diskutierten räumlichen Verhältnisse in dieser Weise zusammengedrückt dar, wie bereits auf pag. 19 bemerkt wurde.

---

[1]) Vgl. die Dissertation von A. Voss, „Über die Anzahl reeller und imaginärer Wurzeln höherer Gleichungen". Göttingen 1869, pag. 16.

Angenommen, die Funktion y habe im Intervall $-\pi \leq x < +\pi$ ein Extrem x. Die Koordinaten bzw. Koeffizienten a, b, c erfüllen dann die Bedingungen

$$(1) \qquad y - \cos x - a \sin 2x - b \cos 2x - c \cos 3x = 0$$

$$(2) \qquad \sin x - 2a \cos 2x + 2b \sin 2x + 3c \sin 3x = 0.$$

Die Werte der Koeffizienten a, b, c sämtlicher Funktionen y, welche an der Stelle x, y des Periodenstreifens, der von den Parallelen $\begin{matrix} x = -\pi \\ x = +\pi \end{matrix}$ begrenzt ist, ein Extrem besitzen, können als Koordinaten der Punkte der durch (1) und (2) definierten geraden Linie im Raum aufgefaßt werden. Auf diese Weise können wir jedem Punkt des Periodenstreifens eine gerade Linie im Raum zuordnen; den ∞^2 Punkten des Periodenstreifens entsprechen also ∞^2 gerade Linien im Raum, welche wir auf 2 Arten zweckmäßig zusammenfassen wollen:

1. Den Punkten einer Geraden $x = \text{const.}$ entsprechen ∞^1 zueinander parallele Geraden, welche sämtlich in der zum Parameter $x = \text{const.}$ gehörigen Tangentialebene der Diskriminantenfläche $D = 0$ liegen. Den ∞^1 Geraden $x = \text{const.}$ entsprechen die ∞^1 Tangentialebenen der Diskriminantenfläche $D = 0$. (Diese ist mit der auf obiger Art deformierten, im Vorausgehenden besprochenen Diskriminantenfläche $D = 0$ identisch.)

2. Den Punkten einer Geraden $y = \text{const.}$ entsprechen die ∞^1 Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche, deren Tangentialebenen für $y = \text{const.}$ durch die erste der beiden obigen Gleichungen definiert sind. Den ∞^1 Geraden $y = \text{const.}$ entsprechen ∞^1 abwickelbare Flächen und die Gesamtheit der Rückkehrkanten dieser abwickelbaren Flächen bildet nach § 1 die Diskriminantenfläche $D = 0$.

Wir werden uns zunächst ein Bild von den Lagenverhältnissen jener Schar von Diskriminantenflächen zu der letzteren Fläche $D = 0$ verschaffen. In Fig. 4 auf Tafel I sei E_x die dem Parameter x entsprechende Tangentialebene der Diskriminantenfläche $D = 0$; g_x die in dieser Ebene liegende Erzeugende der Fläche; $y_i^{(x)}$ seien einige in dieser nämlichen Ebene liegende zueinander parallele Erzeugende der abwickelbaren Flächen, φ sei der Winkel dieser Erzeugenden mit g_x, und w sei der Winkel, welchen die zu den Erzeugenden gehörigen Flächen mit der Tangentialebene E_x bilden.

Aus den obigen Gleichungen (1) und (2) ergeben sich auf elementare Weise folgende Rechnungsresultate.

Aus

$$\cos w = \frac{3 \sin 6x}{2\sqrt{(1 + \cos^2 3x)(4 + 9 \sin^2 3x)}}$$

ist ersichtlich, daß die zu den Parameterwerten $x = 0, \pm \frac{\pi}{6}$, etc. gehörenden Tangentialebenen der Diskriminantenfläche $D = 0$ diejenigen Teile der unendlich vielen Flächen, welche die Erzeugenden $y_i^{(x)}$ aus der Tangentialebene E_x ausschneiden, rechtwinklig durchsetzen. Zwischen diesen Parameterwerten x, nämlich für

$$x = \pm 21^0\,49'\,9'', \quad \pm 38^0\,10'\,51'', \quad \pm 81^0\,49'\,9'', \quad \pm 98^0\,10'\,51'' \text{ etc.}$$

wechselt ein Maximum ($w = 116^0\,22'\,27''$) mit einem Minimum ($w = 63^0\,37'\,33''$) des Schnittwinkels ab. Schneidet man das System von Flächen mit Ebenen parallel zu den Koordinatenebenen, so bestimmt sich der Winkel, welchen die Tangente T_x einer Schnittkurve S der Diskriminantenfläche $D = 0$ mit den Schnittkurven S_{y_i} der Flächen miteinander bilden, aus

$$\operatorname{tg} w'_{ab} = \infty$$

$$\operatorname{tg} w'_{ac} = \frac{5 \cos x - \cos 5x}{3 \sin 6x - 2 \sin 4x}$$

$$\operatorname{tg} w'_{bc} = -\frac{5 \sin x + \sin 5x}{3 \sin 6x + 2 \sin 4x},$$

wobei die Winkel w'_{ab}, w'_{ac}, w'_{bc} auf die parallel zu den ab-, ac-, bc-Koordinatenebenen geführten Schnitte bezug haben.

Das System der abwickelbaren Flächen wird daher durch Ebenen parallel zu der ab-Koordinatenebene in Kurven geschnitten, welche die Evolventen der Schnittkurven derselben Ebenen mit der Diskriminantenfläche $D = 0$ darstellen.

Aus

$$\cos \varphi = \frac{26}{\sqrt{(13 - 5 \cos^2 3x)(52 + 45 \cos^2 3x)}}$$

ergibt sich, daß der Winkel φ, welchen die Erzeugenden g_x und $y_i^{(x)}$ miteinander bilden, für die Parameterwerte

$$x = \pm 10^0\,36'\,9{,}7'', \quad \pm 49^0\,23'\,50{,}3'', \quad \pm 70^0\,36'\,9{,}7'' \text{ etc.}$$

ein Maximum, nämlich $\pm 22^0\,37'\,15{,}6''$, und für die Parameterwerte

$$x = \pm \frac{(2k+1)\pi}{6}$$

ein Hauptminimum $\varphi = 0$ hat. Zwischen den Maxima liegen sekundäre Minima: $\varphi = \pm 21^0\,2'\,47{,}5''$, welche für die Parameterwerte $x = \pm \frac{k\pi}{3}$ stattfinden.

In derselben Figur sei R_{y_3} die Rückkehrkante der dem Parameter $y = y_3$ entsprechenden Fläche. Die Gleichungen der Rückkehrkanten dieser Flächen sind allgemein:

$$a = \frac{1}{5\cos 3x}\left[4\sin^3 x\cos x(3+2\cos^2 x) + y\cdot 6\sin x(\cos x\cos 3x - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{5(1-\lambda^2)(1-14\lambda^2+\lambda^4)}\left[\frac{32\lambda^3(1-\lambda^2)(5+2\lambda^2+5\lambda^4)}{(1+\lambda^2)^3} - \right.$$

$$\left. - y\cdot 48\lambda^3\frac{5-6\lambda^2+5\lambda^4}{(1+\lambda^2)^2}\right]$$

$$b = \frac{1}{5\cos 3x}\left[-8\cos^6 x + \frac{3}{2}y(5\cos x + \cos 5x)\right] = \frac{1}{5(1-14\lambda^2+\lambda^4)}\cdot$$

$$\cdot\left[-8\frac{(1-\lambda^2)^5}{(1+\lambda^2)^3} + y\cdot\frac{3}{(1+\lambda^2)^2}[3-12\lambda^3+98\lambda^4-12\lambda^6+3\lambda^8]\right]$$

$$c = \frac{1}{5\cos 3x}[3\cos x - 4y]$$

$$= \frac{(1+\lambda^2)^3}{5(1-\lambda^2)(1-14\lambda^2+\lambda^4)}\left[3\cdot\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} - 4y\right].$$

Jede der in der Ebene E_x liegenden zueinander parallelen Erzeugenden $y_i^{(x)}$ schneidet die Erzeugende g_x der Diskriminantenfläche $D = 0$ in einem Punkt, durch welchen die Rückkehrkante der zu der Erzeugenden $y_i^{(x)}$ gehörenden Fläche hindurchgeht. Da für die Parameterwerte $x = \pm \frac{(2k+1)\pi}{6}$ der Winkel φ den Wert 0 annimmt, so wird in diesen Fällen eine der Erzeugenden $y_i^{(x)}$ mit der Erzeugenden der Diskriminantenfläche $D = 0$ zusammenfallen. Die Rückkehrkante der dazugehörigen Fläche entält dann eine gerade Linie, nämlich diese Erzeugende g_x; die Schnittpunkte der in derselben Tangentialebene E_x liegenden Erzeugenden $y_i^{(x)}$ der anderen Flächen mit g_x rücken für diese Parameterwerte in das Unendliche, so daß die Rückkehrkanten dieser übrigen Flächen zu der Erzeugenden g_x parallele Asymptoten besitzen.

Um die Parameterwerte y_i zu bestimmen, für welche die entsprechenden Flächen Rückkehrkanten haben, welche gerade Linien enthalten (also stationäre Erzeugende besitzen), schreiben wir die letzte der obigen Gleichungen in der Form

$$y = \frac{3\cos x - 5c\cos 3x}{4}.$$

Für

$$x = \pm\frac{(2k+1)\pi}{6}$$

wird y von c unabhängig, und es ergibt sich

$$\begin{cases} y_1 = +\frac{3}{8}\sqrt{3} \\ y_2 = -\frac{3}{8}\sqrt{3} \\ y_3 = 0. \end{cases}$$

Das System der Rückkehrkanten der den Parametern y entsprechenden Flächen auf der Diskriminantenfläche $D = 0$ ist in den Figg. 1, 2, 2a, 3 als punktiertes Kurvensystem zu erkennen. Zu jeder Kurve ist der Parameter hinzugeschrieben worden, welcher der dazugehörigen Fläche entspricht. Die Kurven haben ihre Spitzen natürlich auf der Rückkehrkante der Fläche und verlaufen asymptotisch zu obengenannten Erzeugenden parallelen Linien. Kompliziert wird der Verlauf der Rückkehrkanten in der Nähe der in den Punkten $a = 0$, $b = \pm 0{,}4$, $c = +\frac{1}{15}$ stattfindenden Spitzen der Rückkehrkante der Fläche $D = 0$, weshalb er zur besseren Orientierung in der Fig. 5 für sich dargestellt ist.

Die links stehenden Teilfiguren heben das Wesentliche des in Fig. 2a dargestellten Verlaufes der Rückkehrkanten in der Nähe des Punktes

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -0{,}4 \\ c &= \tfrac{1}{15} \end{aligned}$$

der Diskriminantenfläche $D = 0$ hervor. (Man beachte, daß wir unter den früheren a, b, c jetzt $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{3}$ verstehen.) Das Auftreten und Verschwinden der reellen Spitzen der Rückkehrkanten, wie es in den Teilfiguren sichtbar ist, wird im folgenden § 5 nachgewiesen werden. Zu Fig. 2 sei noch bemerkt, daß die Projektionen der

Rückkehrkanten der Flächen auf die ac-Koordinatenebene Wendepunkte besitzen[1]), welche in der Projektion von den Erzeugenden der Diskriminantenfläche $D = 0$, die den Parameterwerten

$$x = \pm \frac{\pi}{4}, \ \pm \frac{3\pi}{4}$$

entsprechen, ausgeschnitten werden.

Die Figg. 1, 2, 2a und 3 lassen nun, in der vorgezeichneten Weise gehörig erweitert und genau verzeichnet, folgende praktische Anwendung zur graphischen Ermittelung der einem numerischen Wertetripel a, b, c entsprechenden Kurve

$$y = \cos x + a \sin 2x + b \cos 2x + c \cos 3x$$

zu. Es sei in Fig. 1 (man vgl. die Fig. 4) P_3 der den Werten a, b entsprechende Punkt. Von diesem Punkt aus sei eine Tangente T_x an die dem 3ten Koeffizientenwert c entsprechende Schnittkurve der Fläche $D = 0$ mit einer im Abstande c von der ab-Koordinatenebene parallel zu dieser gelegten Ebene gezogen. Der Berührpunkt sei P_0. Durch P_3 bzw. P_0 gehen die in der Tangentialebene E_x liegenden Erzeugenden $y_3^{(x)}$ und $y_0^{(x)}$. Die Entfernung $\overline{P_3 P_0}$ soll durch die Parameterwerte $y_3^{(x)}$ und $y_0^{(x)}$ ausgedrückt werden.

P_3 ist als Schnitt von

$$a \sin 2x + \quad b \cos 2x + \quad c \sos 3x - y_3^{(x)} + \cos x = 0$$

und

$$-2a \cos 2x + 2b \sin 2x + 3c \sin 3x + \sin x = 0$$

bestimmt, und analog P_0.

Es ist

$$\overline{P_0 P_3}_{ab} = y_3^{(x)} - y_0^{(x)},$$

also unabhängig von dem Parameter x.

Analog findet man für die Entfernung zweier Punkte auf der Tangente an eine durch eine Ebene parallel zur ac-Koordinatenebene ausgeschnittenen Kurve (unter Berücksichtigung des Maßstabes der Figuren) in Fig. 2 und 2a.

---

[1]) Wendetangenten sind in der Projektion der dazugehörigen Flächen auf die ac-Koordinatenebene (man vgl. die bezüglichen Figuren auf den beiden letzten Tafeln) ebenfalls die den Parametern $x = \pm \frac{\pi}{4}, \ \pm \frac{3\pi}{4}$ entsprechenden Erzeugenden dieser Flächen.

$$\overline{P_0 P_3}_{ac} = (y_3^{(x)} - y_0^{(x)}) \frac{\sqrt{9 \sin^2 3x + 4 \cos^2 2x}}{2 \cos x (1 + \sin x \sin 3x)}$$

und schließlich in Fig. 3

$$\overline{P_0 P_3}_{bc} = (y_3^{(x)} - y_0^{(x)}) \frac{\sqrt{9 \sin^2 3x + 4 \sin^2 2x}}{2 \sin x + \sin 3x \cos 2x}.$$

Die Fig. 1 kann daher zu folgender graphischen Konstruktion der für ein gegebenes Wertetripel a, b, c durch die Funktion

$$y = \cos x + a \sin 2x + b \cos 2x + c \cos 3x$$

bestimmten Kurve in der xy-Ebene verwendet werden.

Von dem den Koeffizientenwerten a, b entsprechenden Punkt in der Figur aus werden die Tangenten an die dem Koeffizienten c entsprechende Schnittkurve der Diskriminantenfläche $D = 0$ gelegt. Die dazu nötigen Kurvenstücke können leicht durch Interpolation zwischen zwei benachbarten Werten von c entsprechende in der Figur vorhandene Schnittkurven verzeichnet werden. Die Anzahl der von dem Punkte aus möglichen Tangenten gibt die Anzahl der reellen Extreme der speziellen Funktion y an. Die Abszissen der Extreme können am Rande der Schnittfigur durch Vergleich mit zwei in der Nähe der Berührpunkte den Rand schneidende Erzeugenden genügend genau abgelesen werden. Die Ordinaten der Extreme ergeben sich, wenn die unter Berücksichtigung des Maßstabes der Figur gemessenen Längen der Tangenten zwischen dem Punkt und den Berührpunkten zu den Zahlen addiert werden, welche den Rückkehrkantenkurven zukommen, die durch die Berührpunkte hindurchgehen. Ob die Längen der Tangenten positiv oder negativ genommen werden müssen, wird durch den Sinn bestimmt, den die Parameterwerte der Rückkehrkantenkurven auf dem Rande der Schnittfigur angeben und der sich auf der Tangente fortsetzt. Auch die Zahlen, welche den Rückkehrkanten entsprechen, können durch Vergleich mit benachbarten in der Figur angegebenen genügend genau bestimmt werden. Die Benützung der Figg. 2, 2 a und 3 ist infofern etwas umständlicher, als die Längen der Tangentenstücke, welche abgelesen wurden, noch mit

$$\left| \frac{2 \sin x + \sin 3x \cos 2x}{\sqrt{9 \sin^2 3x + 4 \sin^2 2x}} \right| \text{ bzw. mit } \left| \frac{2 \cos x (1 + \sin 3x \sin x)}{\sqrt{9 \sin^2 3x + 4 \sin^2 2x}} \right|$$

zu multiplizieren sind, wobei für x der Parameterwert der jeweiligen Erzeugenden, welche durch den Berührpunkt hindurchgeht, einzusetzen ist.

§ 5.

Über die Wurzeln der Gleichungen $A + \cos x + B \sin 2x + C \cos 2x + D \cos 3x = 0$.

Im letzten Paragraphen haben wir damit angefangen, die Rückkehrkanten der Diskriminantenflächen der Gleichungen

$$(1) \qquad -y + \cos x + a \sin 2x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0$$

zu diskutieren. Wir werden im Verlaufe dieses Paragraphen die weiteren Singularitäten jener Flächenschar mit Hilfe algebraischer Untersuchungen verfolgen.

Die zum Parameter $y = 0$ gehörige Fläche unterscheidet sich nur durch ihre Lage in bezug auf das Koordinatensystem und durch eine homogene Deformation von der auf den Figg. 1, 2, 2a, 3 dargestellten Diskriminantenfläche der Gleichung

$$(2) \qquad \sin x - 2a \cos 2x + 2b \sin 2x + 3c \sin 3x = 0.$$

Substituieren wir nämlich in (1) statt x, $\frac{\pi}{2} + x$, so geht (1) für $y = 0$ über in

$$\sin x + a \sin 2x + b \cos 2x - c \sin 3x = 0.$$

Deformieren wir die Diskriminantenfläche dieser Gleichung in der Weise, daß wir sie in Richtung der a- und b-Koordinaten um die Hälfte, in Richtung der c-Achse um $^2/_3$ der ursprünglichen Größe homogen verkleinern, so kann die so entstandene Fläche mit der Diskriminantenfläche von (2) durch eine Drehung von 90^0 um die c-Achse und durch eine weitere Drehung von 180^0 um die a-Achse zur Deckung gebracht werden.

Die Gleichung (1) bleibt bei der gleichzeitigen Vertauschung von x mit $-x$ und von a mit $-a$ ungeändert, jedoch ändert sie sich, wenn b durch $-b$ und gleichzeitig x durch $\pi - x$ ersetzt wird, sobald y von Null verschieden ist. Die nicht verschwindendem Parameter y entsprechende Diskriminantenfläche ist daher nur bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrisch. Die Gleichung bleibt jedoch bei den letzten Substitutionen ungeändert, wenn gleichzeitig y mit $-y$ vertauscht wird. Die zu negativen Parametern y gehörenden Flächen werden daher zu den entsprechenden zu positiven Parametern gehörenden Flächen gespiegelt liegen, und zwar ist die ac-Koordinatenebene die spiegelnde Fläche.

Wir bemerken, daß das Flächensystem bei der Frage nach der Anzahl der Extreme x der Funktion

$$(3) \qquad z = \sin x - \frac{a}{2}\cos 2x + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{3}\sin 3x - yx$$

im Intervall $-\pi \leqq x < +\pi$ oder allgemeiner bei der Frage nach den Werten x, für welche die Funktion z einen vorgeschriebenen Differentialquotienten hat, auftritt.

Durch Auflösung der Gleichungen (1), (2), (3) nach a, b, c ergibt sich eine Darstellung des Flächensystems in Parameterform

$$a = -\frac{16\sin^5 x}{5(4\cos^2 x - 1)} - y\sin 2x - \frac{(2\cos x\cos 3x + 3)(z - 6yx)}{5(4\cos^2 x - 1)}$$

$$b = \frac{8\cos^3 x(5 - 2\cos^2 x)}{5(4\cos^2 x - 1)} - y\cos 2x - \frac{2\cos^3 x(4\cos^2 x - 5)(z - 6yx)}{5\sin 3x}$$

$$c = -\frac{9}{5(4\cos^2 x - 1)} - \frac{2(z - 6yx)}{5\sin 3x}.$$

Die Parameterkurven $x = \text{const.}$ sind in dieser Darstellung die geradlinigen Erzeugenden der Fläche, während die Parameterkurven $z = \text{const.}$ die Rückkehrkanten der transzendenten abwickelbaren Flächen sind, deren Tangentialebenen durch Gleichung (3) definiert sind.

Sämtliche Singularitäten der dem System angehörenden Flächen mit Ausnahme der Rückkehrkanten derselben liegen auf einer Fläche, die wir den nachfolgenden Untersuchungen zugrunde legen wollen und, da sie die Gesamtheit der Doppelkurven der zum System gehörenden Flächen enthält, mit D.-F. abkürzend bezeichnen.

Wir verschaffen uns zunächst die Gleichung der D.-F. in Parameterform und verfahren zu diesem Zweck analog wie in § 3 bei Aufstellung der Gleichung der Doppelkurve jener Diskriminantenfläche. Durch Einführung von $\lambda = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ geht (1) über in

$$(4) \quad \begin{aligned} &\lambda^6(b - c - 1 - y) - \lambda^5(4a) - \lambda^4(5b - 15c + 1 + 3y) \\ &- \lambda^2(5b + 15c - 1 + 3y) + \lambda(4a) + b + c + 1 - y = 0. \end{aligned}$$

Im Falle 2er Paare gleicher Wurzeln λ_1 und λ_3 nimmt (4) die Form an

$$(5) \quad (b - c - 1 - y)(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_3)^2(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6) = 0.$$

Führen wir analog wie in § 3 die abkürzenden Bezeichnungen ein

$$\lambda_1 + \lambda_3 = u \qquad \lambda_5 + \lambda_6 = w$$
$$\lambda_1 \cdot \lambda_3 = v \qquad \lambda_5 \cdot \lambda_6 = z,$$

so erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung von (4) und (5) ein System von 6 Gleichungen.

Mit Hilfe der ersten und letzten dieser Gleichungen, nämlich

(a) $$w = \frac{4a}{b - c - 1 - y} - 2u$$

(f) $$z = \frac{\frac{b + c + 1 - y}{b - c - 1 - y}}{v^2},$$

drückt sich w und z durch u und v aus.

Substituieren wir w und z in die anderen 4 Gleichungen, so nehmen dieselben die Formen an

(b) $$-3u^2v^2 + 2v^3 + 2uv^2 \frac{4a}{b - c - y - 1} - v^2 \frac{15c - 5b - 3y - 1}{b - c - y - 1} + \frac{b + c + 1 - y}{b - c - y - 1} = 0$$

(c) $$-2v^3u - 2u^3v^2 + (2v^3 + u^2v^2) \frac{4a}{b - c - y - 1} + 2u \frac{b + c + 1 - y}{b - c - 1 - y} = 0$$

(d) $$v^4 - 4v^3u^2 + 2v^3u \cdot \frac{4a}{b - c - y - 1} + (u^2 + 2v) \frac{b + c + 1 - y}{b - c - y - 1} - v^2 \frac{-5b - 15c - 3y + 1}{b - c - y - 1} = 0$$

(e) $$-2v^3u + (v + v^3) \frac{4a}{b - c - y - 1} + 2u \cdot \frac{b + c + 1 - y}{b - c - y - 1} = 0.$$

Aus (c) und (e) folgt

$$\frac{4a}{b - c - y - 1} = \frac{2u^3v}{v^2 + u^2v - 1}$$

$$\frac{b + c + 1 - y}{b - c - y - 1} = \frac{v^2(v^3 - v - u^2)}{v^2 + u^2v - 1}$$

und mit Benützung von (a) und (f) ergibt sich

$$w = \frac{2u(1-v^2)}{v^2+u^2v-1}$$

$$z = \frac{v^3-v-u^2}{v^2+u^2v-1}.$$

Die vier Gleichungen (b), (c), (d), (e) haben eine gemeinschaftliche Lösung für a, b, c, sobald die Resultante des Systems, nämlich

$$u\cdot v^4\{(v+1)[u^4+2(v^2+6v+1)u^2-3(v-1)^2(5v^2+6v+5)]\cdot y- \\ -2(v-1)[u^4-2(v^2+4v+1)u^2+(v+1)^2(5v^2-2v+5)]\},$$

verschwindet. Betrachten wir a, b, c, y als Unbekannte und lösen nach a, b, c auf, so erhalten wir

$$a = -16\,\frac{u^3v}{(v+1)(u^2-3v^2+6v-3)(u^2+5v^2+6v+5)}$$

$$b = 2\,\frac{v-1}{v+1}\,\frac{u^4-2(v^2+1)u^2-3(v^2-1)^2}{(u^2-3v^2+6v-3)\cdot(u^2+5v^2+6v+5)}$$

$$c = \frac{-[(v-1)^2+u^2]^2}{(u^2-3v^2+6v-3)\cdot(u^2+5v^2+6v+5)}.$$

Die Resultante verschwindet unabhängig für jeden Wert von y, sobald $u\cdot v^4=0$ ist. Für den Parameterwert $u=0$ haben jene 4 Gleichungen die gemeinschaftliche Lösung

$$a = 0$$

$$b = \frac{(v-1)[8(v+1)^3+3y(v-1)(3v^2+10v+3)]}{5v^4+20v^3+78v^2+20v+5}$$

$$c = \frac{(v-1)^2[3v^2+2v+3+4y(v^2-1)]}{5v^4+20v^3+78v^2+20v+5}.$$

Für den Parameterwert $v=0$ reduzieren sich jene 4 Gleichungen auf die beiden

$$a = 0$$
$$b+c+1-y=0.$$

Im Falle $v=0$ werden die 4 Gleichungen für die Koordinatenwerte der Punkte der dem Parameter $\lambda=0$ entsprechenden Erzeugenden der Flächen erfüllt. In der Tat muß, wenn die Substitution (f) einen Sinn haben soll, für $v=0$ auch gleichzeitig $b+c+1-y=0$ sein.

Die durch die Substitution $u = 0$ erhaltenen Gleichungen definieren den in der bc-Ebene liegenden Bestandteil der Doppelkurve der dem Parameter y entsprechenden Diskriminantenfläche. Das Polynom 4^{ten} Grades in v im Nenner der beiden Ausdrücke für a und b verschwindet für keinen reellen Parameterwert v. Durch die Ausdrücke für b und c werden daher geschlossene rationale Kurven 4^{ter} Ordnung definiert, auf deren Singularitäten wir auf pag. 64 näher eingehen werden.

Die Elimination von v ergibt die Gleichung dieser Kurven in entwickelter Form

$$b^2[1 + 8b^2 + 9c^2 - 42c]$$
$$- 4c[1 - 3c]^3 - y[108c^2y - 4b(2b^2 - 9c - 27c^2)] = 0,$$

welche also identisch ist mit der gleich Null gesetzten Diskriminante der Gleichung

$$-y + \cos x + b\cos 2x + c\cos 3x = 0.$$

Die D.-F. besteht demnach aus der bc-Koordinatenebene, welche die ebenen Doppelkurven der Diskriminantenflächen enthält, und aus der durch die obigen Gleichungen definierten Fläche. Der von y unabhängige Faktor der Resultante werde in Zukunft mit R bezeichnet. $R = 0$ stellt dann die Gleichung des räumlichen Teiles der zu y gehörigen Doppelkurve auf das Koordinatensystem u, v der D.-F. bezogen dar.

Die D.-F. muß, wie die einzelnen Doppelkurven selbst, symmetrisch sein in bezug auf die bc-Koordinatenebene, aber auch in bezug auf die ac-Koordinatenebene, da die zu zwei Parametern $+y$ und $-y$ gehörenden Doppelkurven zusammen eine sowohl in bezug auf die ac- als auch bc-Koordinatenebene symmetrische Kurve bilden.

Was die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Parameterkurven $u = \text{const.}$ $v = \text{const.}$ betrifft, so ist Folgendes unmittelbar ersichtlich.

Durch zwei bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrische Flächenpunkte a, b, c und $-a, b, c$ laufen die Parameterkurven

$$\begin{matrix} u = u_1 \\ v = v_1 \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} u = -u_1 \\ v = v_1 \end{matrix}$$

hindurch. Die Parameterkurve $u = \text{const.}$ ist daher das bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrische Bild zur Parameterlinie $u = -\text{const.}$, während die Parameterkurven $v = \text{const.}$ jede für sich bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrisch verlaufen.

Zu den Flächenpunkten mit den Koordinaten a, b, c bzw. u, v erhält man die bezüglich der ac-Koordinatenebene symmetrischen Punkte $a, -b, c$ durch die Substitutionen $\frac{u}{v}$ bzw. $\frac{1}{v}$ statt u und v in die Ausdrücke für a, b, c, also durch perspektivische Abbildung der Koordinaten u, v. Die Parameterkurve $\frac{1}{v} = \text{const.}$ ist daher das bezüglich der ac-Koordinatenebene symmetrische Bild zur Parameterkurve $v = \text{const.}$ Außerdem ist ersichtlich, daß die Parameterkurven $u = \text{const.}$ bezüglich der ac-Koordinatenebene nicht symmetrisch verlaufen.

Bevor wir daran gehen, den reellen Verlauf der Schar der räumlichen Doppelkurven der Flächen des Systems zu diskutieren, wollen wir zu der Schar der ebenen Doppelkurven dieser Flächen bemerken, daß sich als Gleichung für die Umhüllende derselben

$$[3c(1-3c) - b^2]^3 = 0$$

ergibt. Die Umhüllende der ebenen Doppelkurven ist demnach identisch mit der elliptischen Doppelkurve der in § 3 besprochenen Diskriminantenfläche (man vergleiche pag. 13) und ist demnach der Ort für die Schnittpunkte der den Parametern y entsprechenden Rückkehrkanten der Flächen des Systems.

Die einzelnen Doppelkurven berühren nicht die Umhüllende, sondern, wie wir auf pag. 64 nachweisen werden, ist dieselbe Ort für die reellen Spitzen der Doppelkurven der Flächen in der bc-Koordinatenebene, was daraus schon hervorgeht, daß vom Schnittpunkt zweier bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrischen Rückkehrkanten in derselben sowohl ein räumlicher Zweig der Doppelkurve der betreffenden Fläche, als ein in der bc-Koordinatenebene gelegener Zweig der Doppelkurve ausgehen muß, und daß beide Zweige in diesem Punkt je eine Spitze bilden werden. Deshalb ist die Ellipse eine in der bc-Koordinatenebene gelegene Rückkehrkante der D.-F. Sie wird auf dieser Fläche durch die Parameterkurve $u = 0$ dargestellt, welche die Gleichung hat

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2\,\dfrac{v^2-1}{5v^2+6v+5} \\ c = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{(v-1)^2}{5v^2+6v+5}. \end{cases}$$

Die Elimination von v gibt wieder

$$\frac{\left(c-\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\frac{b^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-1=0.$$

Zur Diskussion des reellen Verlaufes des räumlichen Teiles der Doppelkurve der dem Parameter y entsprechenden Fläche denken wir uns aus der Gleichung $R=0$ oder

$$u^4[(v+1)y-2(v-1)]+u^2[2(v+1)(v^2+6v+1)y+$$
$$+4(v-1)(v^2+4v+1)]-3(v^2-1)(v-1)(5v^2+6v+5)y-$$
$$-2(v^2-1)(v+1)(5v^2-2v+5)=0$$

u als Funktion von v und y berechnet, und in die Ausdrücke für a, b, c in der Gleichung der D.-F. eingesetzt. Dann bekommen wir eine Gleichung in Parameterform für den räumlichen Teil der zu y gehörigen Doppelkurve.

Es wird darauf ankommen, nachzuweisen, zu welchen Parameterwerten v und y reelle Kurvenpunkte gehören. Aus $R=0$ bestimmen sich zu jedem Wert von v zwei Wertepaare für u, welche sich durch das Vorzeichen voneinander unterscheiden. Das hat natürlich die geometrische Bedeutung, daß jede Parameterkurve $v=$ const. die zu y gehörige Doppelkurve der betreffenden Diskriminantenfläche in 2 in bezug auf die bc-Koordinatenebene symmetrischen Punktepaaren schneidet. Um zu untersuchen, für welche zusammengehörigen reellen Werte von v und y diese Schnittpunkte reell sind, substituieren wir $u^2=z$ in $R=0$, und untersuchen die dadurch entstandene quadratische Gleichung in z, welche wir abgekürzt in der Form schreiben wollen

$$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0,$$

nach dem Sturmschen Verfahren in bezug auf die Anzahl ihrer positiven Wurzeln. Es sind demgemäß die Funktionen

$$\alpha = R(\infty) = R'(\infty) = (v+1)y-2(v-1)$$
$$\beta = R'(0) = (v+1)(v^2+6v+1)y+2(v^2+4v+1)(v-1)$$
$$\gamma = R(0) = (v^2-1)[-3(v-1)(5v^2+6v+5)y-$$
$$-2(v+1)(5v^2-2v+5)]$$

und die Diskriminante der Gleichung

$$\Delta \equiv y^2[(v+1)(v^2+1)]^2 - y(v^2-1)(v^4-5v^3-8v^2-5v+1) - (v-1)^2(v^4-3v^2+1)$$

in bezug auf ihre Vorzeichen für gegebene Werte von v und y zu untersuchen. Es ist für die weitere Untersuchung zweckmäßig, sich die durch $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ und $\Delta = 0$ definierten Kurven in einer yv-Ebene graphisch darzustellen, was der Zweck der Fig. 6 ist. Dort sind sie kurz mit Δ, α, β, γ bezeichnet. Wir bemerken, daß sämtliche Kurven die Eigenschaft haben, durch Punkte y, v und $-y$, $\frac{1}{v}$ in dieser Ebene gleichzeitig hindurchzugehen[1]).

Da die Diskriminante der in y quadratischen Gleichung $\Delta = 0$, nämlich

$$(v+1)^2\left[\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\left[\left(v^2-\frac{5}{2}v+1\right)^2+\frac{15}{2}v^2\right],$$

nie negativ wird, so wird Δ von jeder Geraden $v = \text{const.}$ in 2 reellen Punkten geschnitten. Die Kurve Δ schneidet die v-Achse in den Punktepaaren

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61805\ldots \\ \dfrac{1}{v_1} = 0{,}61805\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = -1{,}61805\ldots \\ \dfrac{1}{v_2} = -0{,}61805\ldots \end{cases}$$

und im Punkt $v = 1$ dieser Achse und die y-Achse in

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}61805\ldots \\ \dfrac{1}{y_1} = 1{,}61805\ldots \end{cases}$$

In den Punkten

$$\begin{cases} v = +1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} v = -1 \\ y = \infty \end{cases}$$

hat die Kurve Doppelpunkte. Ferner besitzt sie die Asymptoten

$$\begin{cases} v = -1 \\ y = +1{,}61805\ldots \\ y = -0{,}61805\ldots \end{cases}$$

[1]) Infolgedessen haben wir uns in der in Fig. 6 sichtbaren Weise mit der Zeichnung auf die „positive y-Halbebene“ beschränken können.

Die Maxima und Minima der Kurve Δ bestimmen sich aus der Gleichung

$$(v^2+10v+1)\cdot(v^{10}+6v^9-10v^8-36v^7-10v^6-8v^5-10v^4-36v^3-10v^2+6v+1)=0,$$

welche durch

$$(z+10)(z^5+6z^4-15z^3-60z^2+40z+160)=0$$

ersetzt werden kann.

Dem Wurzelwert $z=-10$ entspricht

ein Minimum $\begin{cases} v_1 = -0{,}10102\ldots \\ y_1 = +0{,}6120\ldots \end{cases}$ und ein Maximum $\begin{cases} \frac{1}{v_1} = -9{,}8989\ldots \\ y_1 = -0{,}6120\ldots \end{cases}$

Das Polynom 5^{ten} Grades in z ist irreduktibel und hat die 3 reellen Nullstellen

$$\begin{cases} z_2 = -6{,}85977\ldots \\ z_3 = +2{,}078650\ldots \\ z_4 = +2{,}717507\ldots \end{cases}$$

Diesen entsprechen

die Maxima $\begin{cases} \begin{cases} v_2 = -6{,}7108\ldots \\ y_2 = -0{,}6125\ldots \end{cases} \\ \begin{cases} v_3 = 0{,}43885\ldots \\ y_3 = 0{,}9096\ldots \end{cases} \\ \begin{cases} v_4 = 0{,}7562\ldots \\ y_4 = 0{,}005936\ldots \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{v_2} = -0{,}149\ldots \\ -y_2 = +0{,}6125\ldots \end{cases} \end{cases}$ und die Minima $\begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{v_3} = 2{,}27864\ldots \\ -y_3 = -0{,}9096\ldots \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{v_4} = 1{,}3224\ldots \\ -y_4 = -0{,}005936\ldots \end{cases} \end{cases}$

Was die gleichseitige Hyperbel a betrifft, so hat dieselbe die Asymptoten

$$v=-1 \qquad y=+2,$$

berührt die Kurve Δ in den Punkten

$$\begin{cases} v_1 = -4{,}79\ldots \\ y_1 = +3{,}070\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} v_2 = -2{,}317\ldots \\ y_2 = -3{,}070\ldots \end{cases}$$

und geht durch die Doppelpunkte von Δ hindurch.

Die Kurve 6^{ter} Ordnung γ, welche in die beiden Geraden

$$v - 1 = 0$$
$$v + 1 = 0$$

und in eine Kurve 4^{ter} Ordnung zerfällt, berührt Δ in den 4 Punkten

$$\begin{cases} v_1 = +3{,}260 \ldots \\ y_1 = -0{,}833 \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{v_1} = v_2 = +0{,}307 \ldots \\ -y_1 = y_2 = 0{,}833 \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 = -0{,}298 \ldots \\ y_3 = +0{,}597 \ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{v_3} = v_4 = -3{,}327 \ldots \\ -y_3 = y_4 = -0{,}597 \ldots \end{cases}$$

und hat die Asymptoten

$$v = +1$$
$$y = -\tfrac{2}{3}.$$

Bezüglich der Kurve 4^{ter} Ordnung β, welche die Asymptoten

$$\begin{cases} y = -2 \\ v = -5{,}8284 \ldots \\ v = -1 \\ v = -0{,}1716 \ldots \end{cases}$$

besitzt, sei bemerkt, daß sie durch die Doppelpunkte von Δ hindurchgeht und die obenerwähnten 6 Berührpunkte von α und γ mit Δ ausschneidet.

Die 3 Kurven Δ, α, γ teilen die gesamte yv-Ebene in drei Gebiete ein, welche wir mit G_0, G_1, G_2 bezeichnen wollen und die dadurch charakterisiert sind, daß sich für die Koordinaten y, v der Punkte dieser Gebiete aus $R = 0$ bzw. 0,1 oder 2 Paar reelle Wurzeln u berechnen. Die Kurve β spielt als Trennungskurve dieser Gebiete insofern keine Rolle, als beim Überschreiten derselben kein Verlust an Zeichenwechsel in der Reihe der Funktionen

$$\gamma,\ \beta,\ \frac{\Delta}{\alpha} \text{ einerseits} \quad \text{und} \quad \alpha,\ \alpha,\ \frac{\Delta}{\alpha} \text{ andererseits}$$

stattfindet.

Die Gebiete G_0, G_1 und G_2 hängen in den obengenannten 6 Berührpunkten von α und γ mit Δ miteinander zusammen; ferner in dem im Endlichen gelegenen Doppelpunkt von $\Delta = 0$.

Damit ist anschaulich dargestellt, welche Parameterkurven $v = \text{const.}$ die dem Parameter y entsprechende Doppelkurve in reellen Punkten schneiden.

Wir bemerken noch Folgendes:

Die Kurve Δ trennt die Gebiete G_0 und G_2[1]). Die Abszissen v_0 der Schnittpunkte einer Parallelen zur y-Achse $y = y_0$ mit der Kurve Δ geben, falls zu y_0, v_0 reelle zusammenfallende Werte von u gehören, die Parameterwerte v_0 derjenigen Parameterkurven $v = \text{const.}$ der D.-F. an, welche die zu y_0 gehörige Doppelkurve in 2 bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrischen Punkten berühren.

Dieselbe Parallele schneidet die Kurve γ, welche die Gebiete G_0 und G_1 oder G_2 und G_1 voneinander trennt, in 3 Punkten mit den Abszissen

$$v_0' = -1$$
$$v_0'' = +1$$
$$v_0'''.$$

Dabei bezeichnet v_0''' den Parameterwert der Kurve $v = \text{const.}$ der D.-F., welche die Spitzen der zu y_0 gehörigen räumlichen Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene ausschneidet. Diese fallen nach pag. 41 mit den Spitzen der ebenen Doppelkurven zusammen. In der Tat, substituiert man in der Parametergleichung der ebenen Doppelkurven auf pag. 39

$$y = -\frac{2}{3}\frac{(v+1)(5v^2 - 2v + 5)}{(v-1)(5v^2 + 6v + 5)},$$

aus welcher Gleichung sich zu y_0 der reelle Parameterwert v_0''' bestimmt, so geht die Parametergleichung der ebenen Doppelkurven über in die Parametergleichung der Ellipse auf pag. 41. Die Abszisse $v_0' = -1$) bezeichnet den Schnittpunkt der beiden in der Ebene $b = -y_0$ liegenden Erzeugenden der betreffenden Fläche, welche den Parameterwerten $x = \pm\frac{\pi}{2}$ entsprechen, also den Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -y_0 \\ c = +\frac{1}{3}. \end{cases}$$

[1]) Insoweit sie überhaupt Trennungskurve der Gebiete ist.

Durch diesen Punkt geht auch die ebene Doppelkurve hindurch, welche dem Parameter y_0 entspricht, wie aus der Parameterdarstellung der Gleichung derselben auf pag. 39 hervorgeht. In diesem Punkt besitzt, wie auf pag. 65 bewiesen wird, der räumliche Teil der Doppelkurve keine Spitze, so daß derselbe in diesem Punkt die bc-Koordinatenebene senkrecht durchsetzt. Der Punkt bildet einen Doppelpunkt der dem Parameter y_0 entsprechenden Doppelkurve. Die Abszisse $v_0 = +1$ entspricht einer isolierten Flächensingularität, nämlich dem Schnittpunkt der beiden den Parametern $\lambda = \pm i$ entsprechenden Erzeugenden der betreffenden Fläche, solange $y_0 \neq 0$ ist.

Was schließlich der Abszisse V_0 des Schnittpunktes der Parallelen $y = y_0$ mit der Kurve α, welche ebenfalls die Gebiete G_0 und G_1 oder G_2 und G_1 voneinander trennt, anlangt, so erkennt man, daß für $\begin{cases} v = V_0 \\ y = 0 \end{cases}$ ein Wurzelpaar u der Gleichung $R = 0$ unendlich groß wird.

Die Parameterkurve $u = \infty$ auf der D.-F. ist die Gerade in der bc-Koordinatenebene $c = -1$, und der den Parameterwerten

$$\left.\begin{aligned} v &= V_0 \\ u &= \infty \\ y &= y_0 \end{aligned}\right\}$$

entsprechende Punkt auf dieser Geraden hat den Abstand

$$b = \frac{2(V_0 - 1)}{V_0 + 1} = y_0$$

von der ac-Koordinatenebene. Er ist Schnittpunkt der beiden in der bc-Koordinatenebene liegenden, den Parametern $x = 0$ bzw. $x = \pi$ entsprechenden Erzeugenden

$$\begin{aligned} b + c + 1 - y_0 &= 0 \\ b - c - 1 - y_0 &= 0. \end{aligned}$$

In diesem Punkt durchsetzt die betreffende Doppelkurve die bc-Kordinatenebene senkrecht und wird dabei von der Parameterkurve $v = V_0$ berührt.

Die Doppelkurven der Flächen der Schar verlaufen natürlich auch in ihren isolierten Teilen auf der D.-F. Wir werden jetzt festzustellen haben, welche der reellen Schnittpunkte der Parameter-

kurven $v = \text{const.}$ mit der dem Parameter y entsprechenden Doppelkurve auf isolierte Teile derselben fallen.

Durch einen Punkt u, v der D.-F. geht im allgemeinen nur eine Doppelkurve einer Fläche der Schar hindurch, deren Parameterwert y sich für die Werte von u und v aus der Gleichung $R = 0$ berechnet. In einem derartigen nicht singulären Punkt der D.-F. schneiden sich 2 Erzeugende der dem Parameter y entsprechenden Fläche, und die zu diesen Erzeugenden gehörigen Parameter λ_1 und λ_3 sind Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^2 - u\varrho + v = 0.$$

Der Punkt u, v der betreffenden Doppelkurve liegt daher auf einem isoliert verlaufenden Teil derselben, wenn die Diskriminante dieser Gleichung, nämlich

$$u^2 - 4v,$$

negativ ist. Die durch $u^2 - 4v = 0$ auf der D.-F. definierte Kurve ist der Ort der Koordinaten a, b, c, für welche Gleichung (4) eine 4-fache Wurzel besitzt, wenn der Parameter y zu den jeweiligen Werten von u und v aus $R = 0$ berechnet wird. Die Kurve ist demnach der Ort der Rückkehrkantenspitzen sämtlicher Flächen des Systems. Durch die Substitution $u^2 = 4v$ in die Gleichung der D.-F. ergibt sich die Gleichung der auf der D.-F. durch $u^2 = 4v$ definierten Kurve in Parameterform

$$a = \frac{128}{5} \frac{v^2 \cdot \sqrt{v}}{(v+1)^3 (3 - 10v + 3v^2)}$$

$$b = \frac{2}{5} \frac{(v-1)^3 (3v^2 + 14v + 3)}{(v+1)^2 (3 - 10v + 3v^2)}$$

$$c = \frac{1}{5} \frac{(v+1)^2}{3 - 10v + 3v^2},$$

welche natürlich nichts anderes darstellt, als den räumlichen Teil der Rückkehrkante der in § 3 besprochenen Diskriminantenfläche (pag. 12). Die vorstehende Gleichung wird nach Rückgängigmachung der homogenen Deformation (pag. 33) mit jener identisch, wenn wir substituieren $\sqrt{v} = \lambda$, welche Gleichung eine Identität ausdrückt.

Die nicht auf der bc-Koordinatenebene gelegenen Spitzen der Rückkehrkante der dem Parameter y entsprechenden Fläche berechnen sich aus obiger Parametergleichung für diejenigen Werte von v, welche Wurzeln der Gleichung

$$v^3(3y+2)+v^2(-7y-6)+v(-7y+6)+3y-2=0$$

sind, welche durch die Substitution $u^2=4v$ in $R=0$ erhalten wird. Die durch diese Gleichung in der yv-Ebene definierte Kurve ist in Fig. 6 verzeichnet und dort kurz mit R bezeichnet worden. Die Diskriminante dieser Gleichung reduziert sich auf

$$y^2[y+\tfrac{3}{8}\sqrt{3}][y-\tfrac{3}{8}\sqrt{3}].$$

Die Gleichung hat 3 reelle Wurzeln v, sobald

$$|y|>\tfrac{2}{3} \text{ oder } y=0$$

ist. Aber nur die positiven Wurzeln v liefern reelle Rückkehrkantenspitzen, und man überzeugt sich leicht, daß die Gleichung 1, 3 oder 2 positive Wurzeln v besitzt, sobald bzw.

$$\begin{gathered} 0<|y|<\tfrac{3}{8}\sqrt{3} \\ \tfrac{3}{8}\sqrt{3}<|y|<\tfrac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad y=0 \\ |y|>\tfrac{2}{3} \end{gathered}$$

ist. Für $y=0$ reduziert sich die Gleichung auf $2(v-1)^3=0$. Die Kurve R hat im Punkt $v=+1$ einen Wendepunkt mit der v-Achse als Wendetangente. Die Parameterkurve $v=+1$ auf der D.-F. ist durch die Gleichung

$$\begin{cases} a=-8\cdot\dfrac{u}{u^2+16} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{u^2}{u^2+16} \end{cases} \quad \text{oder} \quad a^2+\frac{\left(c+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-1=0$$

definiert, und stellt die in der ac-Ebene liegende Doppelkurve der dem Parameter $y=0$ entsprechenden Fläche dar. $v=+1$ schneidet sich mit den Parameterkurven $u=\pm 2$ in den Punkten

$$\begin{cases} a=-0{,}8 \\ b=0 \\ c=-0{,}2 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} a=+0{,}8 \\ b=0 \\ c=-0{,}2, \end{cases}$$

welche dem auf pag. 16 erwähnten ersten Punktepaare jener Diskriminantenfläche entsprechen. In diesen beiden Punkten besitzt demnach die Kurve $u^2-4v=0$ Spitzen, die Spitzentangenten sind Rückkehrkanten der dem Parameter $y=0$ entsprechenden Fläche[1]),

[1]) Also stationäre Erzeugende der Fläche.

deren räumliche Rückkehrkante in diesen Punkten ebenfalls je eine Spitze bildet, welche von denselben Tangenten berührt werden. Sämtliche diese sich in den beiden Punkten berührende Linien werden außerdem noch von der Parameterkurve $v = +1$ in denselben Punkten berührt. (Man vgl. Figg. 1, 2 und 3.)

Die den Parametern $y = \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}$ entsprechenden Doppelkurven berühren ebenfalls die Kurve $u^2 - 4v = 0$, und zwar in den vier Punktepaaren

$$a = \pm\ 0{,}0125\ \ldots$$
$$b = \pm\ 0{,}4535\ \ldots$$
$$c = +\ 0{,}098\ \ldots$$

Aus § 4, pag. 33 ist bekannt, daß die Rückkehrkanten der Flächen, welche den Parametern $y = \pm \frac{3}{8}\sqrt{3}$ entsprechen, gerade Linien enthalten. Diese geraden Teile der Rückkehrkante werden in den obigen Punkten von den krummlinigen Teilen derselben berührt und auch von der Kurve $u^2 - 4v = 0$. Der Berührpunkt ist Entstehungspunkt zweier reeller Spitzen der betreffenden Rückkehrkante, die sich für wachsende Parameterwerte $|y|$ voneinander entfernen. Eine der beiden in einem solchen Berührpunkt entstandenen Spitzen verschwindet wieder für den Parameterwert $|y| = \frac{2}{3}$ und zwar in dem Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -0{,}4 \quad (y = +\frac{2}{3}) \\ c = +\frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{bzw. in} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = +\ 0{,}4 \quad (y = -\frac{2}{3}) \\ c = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{(Fig. 5)}$$

Bezüglich der in Fig. 6 enthaltenen Kurve R sei bemerkt, daß sie die Kurve Δ in den Punkten

$$\begin{cases} v = +\ 0{,}141\ \ldots \\ y = +\frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v = 7{,}098\ \ldots \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

berührt und die Asymptoten

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ v = -1 \\ v = +\frac{1}{3} \\ v = +\ 3 \end{cases}$$

besitzt.

Der auf der Seite der negativen v-Achse verlaufende Teil der Kurve kommt zur Bestimmung der Anzahl der reellen Rückkehr-

kantenspitzen nicht in Betracht und ist deshalb nur schwach eingezeichnet worden. Da die Parameterkurve $v = +1$ die Doppelkurven nur in isolierten Teilen derselben schneidet (vergl. pag. 47), so werden die Abszissen v_0 der Punkte desjenigen Stückes einer Parallelen zur v-Achse $y = y_0$, welches von der Linie $v = +1$ geschnitten wird und von den Schnittpunkten mit den beiden sich längs der Asymptoten $v = \frac{1}{3}$ und $v = +3$ in das Unendliche erstreckenden Zweigen der Kurve R begrenzt ist, Werten der Parameterkurven $v = v_0 = \text{const.}$ entsprechen, welche die zu y_0 gehörige Doppelkurve in isolierten Teilen derselben schneiden, sofern die Abszissen v_0 Punkten des Gebietes G_1 angehören. Sofern sie den Punkten des Gebietes G_2 angehören, welches in dem betreffenden Fall von G_1 durch die Kurve α (pag. 47) begrenzt ist, wird offenbar nur eines der beiden Paare von Schnittpunkten der Parameterkurven $v = v_0 = \text{const.}$ mit der betreffenden Doppelkurve auf einen isolierten Teil derselben fallen, während das andere Paar reellen und nicht isolierten Teilen der Doppelkurve angehört. Die diesbezüglichen Teile der Gebiete G_1 bzw. G_2 sind in Fig. 6 durch Schraffur hervorgehoben.

Schließlich sollen noch die Grenzen für den isolierten Verlauf der ebenen Doppelkurven festgesetzt werden.

Der Schnitt der Ebene $a = 0$ mit der dem Parameter y entsprechenden Fläche zerfällt in eine doppelt zählende Kurve 4^{ter} Ordnung (pag. 40) und in die beiden Tangenten an dieselbe:

$$b + c + 1 - y = 0$$
$$b - c - 1 - y = 0,$$

welche Erzeugenden den Parametern $x = 0$ bzw. $x = \pi$ entsprechen. Die Berührpunkte dieser beiden Tangenten bestimmen sich zu jedem y aus

$$c = \frac{-4y + 3}{5} \qquad \text{bzw.} \qquad c = \frac{4y + 3}{5}$$
$$b = \frac{9y - 8}{5} \qquad\qquad b = \frac{9y + 8}{5}.$$

Das Stück der Doppelkurve zwischen diesen Berührpunkten, welches den Koordinatenanfangspunkt enthält, verläuft isoliert und ist der geometrische Ort des Schnittes zweier den Parametern $\pm ix$ entsprechenden Erzeugenden der betreffenden Fläche. ($|\cos x| > 1$).

Bezüglich der für $y = 0$ existierenden Doppelkurve der betreffenden Fläche in der ac-Koordinatenebene sei bemerkt, daß der Teil derselben zwischen den Berührpunkten der Doppelkurve mit den zu $x = \pm \frac{\pi}{2}$ gehörigen Erzeugenden, nämlich

$$\begin{cases} a = \pm 0{,}8 \\ b = 0 \\ c = -0{,}2, \end{cases}$$

welcher den Koordinatenanfangspunkt enthält, isoliert verläuft, und Ort der Schnittpunkte zweier den Parametern

$$\frac{\pi}{2} + ix \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{2} - ix$$

entsprechenden Erzeugenden der Fläche ist. ($|\sin x| > 1$).

Die Untersuchung der Singularitäten der Doppelkurven[1]) beginnen wir mit der Diskussion der Doppelpunkte derselben und fragen zu diesem Zweck nach der Anzahl der Doppeltangentialebenen der Flächen. Die dem Parameter $y = 0$ entsprechende Fläche hat 3 Doppeltangentialebenen (pag. 17), welche den Parameterpaaren

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

entsprechen.

Die dem ersten Parameterpaar entsprechenden Erzeugenden sind zugleich Teile der Rückkehrkante der Fläche, welche in der ac-Koordinatenebene liegen. Sie schneiden sich im Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = +\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Gleichung (4) besitzt für diese Koordinatenwerte 2 dreifache Wurzeln $\lambda = \pm 1$.

---

[1]) Mit besonderer Hervorhebung derjenigen der nicht isoliert verlaufenden Zweige.

Die in der bc-Koordinatenebene verlaufende Doppelkurve der Fläche hat in diesem Punkt eine Spitze (pag. 40). Für einen von 0 verschiedenen Parameterwert y verlieren diese beiden Erzeugenden die Eigenschaft, Teile der Rückkehrkante der betreffenden Fläche zu sein. Sie bestimmen die Ebene $b + y = 0$, welche Doppeltangentialebene ist. Für variable Werte von y durchläuft ihr Schnittpunkt die durch

$$\begin{cases} b = -y \\ c = \frac{1}{3} \\ a = 0 \end{cases}$$

dargestellte gerade Linie in der bc-Koordinatenebene (pag. 46), für welche Koeffizienten Gleichung (4) die Form annimmt

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 (\lambda^2 (3y + 2) + 3y - 2) = 0.$$

Dadurch ist der einzige Doppelpunkt der Doppelkurven bestimmt, welche von Null verschiedenen Parametern y entsprechen; denn die zu $x = \pm \frac{3\pi}{4}$ und $x = \pm \frac{\pi}{4}$ gehörigen Erzeugenden der Flächen sind windschief für alle von 0 verschiedenen Parameter y. Für $y = 0$ bestimmen sich 2 Doppelpunkte der Doppelkurve in der ac-Koordinatenebene

$$\begin{cases} a = \mp \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

welche den auf pag. 17 besprochenen Doppelpunkten der Doppelkurve jener Diskriminantenfläche entsprechen.

— —

Zur Diskussion der 3-fachen Punkte der Doppelkurven sei zunächst bemerkt, daß der Ort derselben eine 3-fache Kurve auf der D.-F. darstellt, längs welcher sich drei Flächenteile durchsetzen. Durch jeden nicht singulären Punkt der D.-F., in welchem sich die Parameterlinien $\begin{matrix} u = u_1 \\ v = v_1 \end{matrix}$ schneiden und zu welchem sich aus $R = 0$ der Parameterwert $y = y_1$ der hindurchgehenden Doppelkurve bestimmt, gehen zwei Erzeugende der dem Parameter y_1 entsprechenden Fläche hindurch. Die Parameterwerte λ_1 und λ_3 dieser Erzeugenden sind

$$\lambda_1, \lambda_3 = \frac{u_1 \pm \sqrt{u_1^2 - 4 v_1}}{2}.$$

Außerdem geht durch einen solchen Punkt der D.-F. die Schnittlinie zweier Tangentialebenen der zu y_1 gehörigen Diskriminantenfläche hindurch. Die Parameterwerte λ_5 und λ_6 dieser beiden Tangentialebenen sind Wurzeln der Gleichung (pagg. 38 und 39)

$$(5) \quad \varrho^2 - w_1 \cdot \varrho + z_1 = (v_1^2 + u_1^2 v_1 - 1)\varrho^2 + 2u_1(v_1^2 - 1)\varrho + v_1^3 - v_1 - u_1^2 = 0,$$

nämlich

$$\lambda_5, \lambda_6 = \frac{-u_1(v_1^2 - 1) \pm \sqrt{v_1[u_1^2 - v_1^2 + 1] \cdot [u_1^2 + v_1^2 - 1]}}{v_1^2 + u_1^2 v_1 - 1}.$$

Die Schnittlinie dieser beiden Tangentialebenen geht in eine Erzeugende der betreffenden Fläche über, sobald $\lambda_5 = \lambda_6$ wird. Wir haben es dann mit einem 3-fachen Punkt der Doppelkurve der zu y_1 gehörigen Flächen zu tun. Durch denselben gehen 3 Paare Parameterkurven der D.-F. hindurch:

$$u_1, v_1 \quad u_2, v_2 \quad u_3, v_3$$

und man erhält dieselben Parameter λ_1, λ_3 und $\lambda_5 = \lambda_6$, gleichgültig, welches dieser 3 Wertepaare der sich in einem 3-fachen Punkt schneidenden Parameterkurven in obige Formeln eingesetzt wird. Es ändert sich nur die Reihenfolge der daraus erhaltenen Parameterwerte λ.

Die Diskriminante der Gleichung $\varrho^2 - w\varrho + z = 0$ verschwindet erstens für $v = 0$.

Die 3 Doppelwurzeln der Gleichung (4) haben in diesem Fall die Werte

$$\begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_5 = \lambda_6 = -u. \end{cases}$$

Der Ort der dadurch definierten 3-fachen Punkte der Doppelkurven ist die Parameterkurve $v = 0$ der D.-F. in der bc-Koordinatenebene und zwar die durch

$$b = -2 \cdot \frac{u^2 + 1}{u^2 + 5}$$

$$c = -\frac{(u^2 + 1)^2}{(u^2 - 3)(u^2 + 5)} \qquad \text{oder} \qquad b^2 - 4bc - 4c = 0$$

definierte Hyperbel. Eine der 3 durch einen solchen Punkt hindurchgehenden Erzeugenden der Fläche entspricht dem Parameterwert $x = 0$. Die Substitution $v = 0$ in $R = 0$ ergibt

$$u^4 (y + 2) + 2 u^2 (y - 2) + 5 (2 - 3 y) = 0.$$

Vermittelst dieser Gleichung bestimmen sich zu jedem y die dazugehörigen 3-fachen Punkte der Doppelkurve in der bc-Ebene. Die Diskriminante dieser Gleichung 2^{ten} Grades in u^2 ist $y^2 + y - 1$ und die Gleichung hat 0, 2 oder 1 positive Wurzel, je nachdem y bzw. zwischen den Grenzen liegt:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}61803\ldots < y < 0{,}61803\ldots = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$0{,}61803\ldots \leqq y \leqq \tfrac{2}{3} \quad \text{oder} \quad -2 < y < -1{,}61803\ldots$$

$$y > \tfrac{2}{3} \quad \text{oder} \quad y < -2.$$

Aus der Unsymmetrie der Hyperbel folgt, daß durch das Vorstehende erst die Hälfte aller in der bc-Koordinatenebene liegenden 3-fachen Punkte des nicht isolierten Teiles einer dem Parameter y entsprechenden Doppelkurve bestimmt ist. Die Gleichung (5) hat offenbar dann auch 2 zusammenfallende Wurzeln, wenn u_1 und v_1 gleichzeitig unendlich groß werden, und zwar so, daß der Quotient

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{u'}$$

endlich bleibt. In diesem Fall reduziert sich Gleichung (5) auf

$$\varrho^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{u'}\right) \varrho + \left(\frac{1}{u'}\right)^2 = \left(\varrho + \frac{1}{u'}\right)^2 = 0,$$

so daß

$$\lambda_5 = \lambda_6 = -\frac{1}{u'}$$

wird, während $\varrho^2 - u\varrho + v = 0$ dann offenbar die Wurzeln hat:

$$\begin{cases} \lambda_3 = +\dfrac{1}{u'} \\ \lambda_1 = \infty. \end{cases}$$

Die dadurch sich ergebenden 3-fachen Punkte der Doppelkurve haben die Eigenschaft, daß eine der 3 durch sie hindurchgehenden Erzeugenden dem Parameter $x = \pi$ entspricht. Diese 3-fachen Punkte liegen natürlich auf der zu obiger bezüglich der c-Achse symmetrischen Hyperbel

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = +2\,\dfrac{u'^2+1}{u'^2+5} \\ c = -\dfrac{(u'^2+1)^2}{(u'^2-3)\cdot(u'^2+5)} \end{cases} \quad \text{oder} \quad b^2 + 4bc - 4c = 0,$$

welche die Parameterkurve $v' = 0$ des durch perspektivische Abbildung der Parameterkurven $\begin{matrix} u = \text{const.} \\ v = \text{const.} \end{matrix}$, nämlich durch die Substitution

$$\begin{cases} u = \dfrac{u'}{v'} \\ v = \dfrac{1}{v'} \end{cases}$$

auf der D.-F. eingeführten Koordinatensystems $\begin{matrix} u' = \text{const.} \\ v' = \text{const.} \end{matrix}$, darstellt.

Die Parameterwerte u'^2, welche die Koordinaten der 3-fachen Punkte des nicht isolierten Teiles der Doppelkurve für jedes y bestimmen, sind die positiven Wurzeln u'^2 der Gleichung

$$u'^4(-y+2) + 2u'^2(-y-2) + 5(2+3y) = 0,$$

in welche die Gleichung $R = 0$ durch obige Substitutionen übergeht. Diese Gleichung hat analog zu der vorigen 0, 2 oder 1 positive Wurzel u'^2, wenn y bzw. zwischen den Grenzen liegt:

$$\begin{aligned} 1{,}61803\ldots > y > -0{,}61803\ldots \\ -0{,}61803\ldots \geqq y \geqq -\tfrac{2}{3} \quad &\text{oder} \quad 2 > y > +1{,}61803\ldots \\ y < -\tfrac{2}{3} \quad &\text{oder} \quad y > 2. \end{aligned}$$

Die Anzahl der in der bc-Koordinatenebene gelegenen 3-fachen Punkte der nicht isolierten Teile der Doppelkurven beträgt demnach 0, 2, 1 oder 3, sobald $|y|$ bzw. zwischen den Grenzen liegt:

$$\begin{aligned} |y| < 0{,}61803 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 0{,}61803\ldots < |y| < \tfrac{2}{3} \quad \text{oder} \quad 2 < |y| \\ \tfrac{2}{3} < |y| < 1{,}61803 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 2 > |y| > 1{,}61803\ldots \end{aligned}$$

Die Koordinaten dieser 3-fachen Punkte lassen sich auch mit Hilfe der quadratischen Gleichungen in u^2 bzw. in u'^2 und den Parametergleichungen der Hyperbeln wie folgt direkt durch y ausdrücken:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 4\,\dfrac{2 - y^2 \pm y\sqrt{y^2 \pm y - 1}}{-10 \mp 5y + \sqrt{y^2 \pm y - 1}} \\ c = 2\,\dfrac{\pm y + y^2 + 2\sqrt{y^2 + y - 1}}{-10 \mp 5y \pm 4\sqrt{y^2 \pm y - 1}}, \end{cases}$$

wobei in beiden Ausdrücken jedesmal die korrespondierenden Zeichen zu nehmen sind. Dabei ist aber zu beachten, daß auf dem Stück der Hyperbel $b^2 - 4bc - 4c = 0$, welches von den beiden Punkten derselben

$$\begin{cases} b = -\frac{2}{5} \\ c = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

begrenzt ist und den Koordinatenanfangspunkt enthält, und auf dem von den entsprechenden Punkten

$$\begin{cases} b = +\frac{2}{5} \\ c = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} b = +2 \\ c = -1 \end{cases}$$

der anderen Hyperbel begrenzten Stück derselben, welches ebenfalls den Koordinatenanfangspunkt enthält, keine 3-fachen Punkte der nicht isolierten Teile der Doppelkurven liegen.

Der Ort der weiteren 3-fachen Punkte der Doppelkurven wird durch die Beziehung

$$[u^2 - v^2 + 1] \cdot [u^2 + v^2 - 1] = 0$$

bestimmt.

Wird $u^2 = v^2 - 1$ bzw. $u^2 = -(v^2 - 1)$ in die Gleichung der D.-F. substituiert, so ergibt sich als Gleichung des geometrischen Ortes der übrigen 3-fachen Punkte

$$(6)\begin{cases} a = \dfrac{4v \cdot \sqrt{v^2 - 1}}{(v-2)(3v^2 + 3v + 2)} \\ b = 2\,\dfrac{(v-1) \cdot v^2}{(v-2)(3v^2 + 3v + 2)} \\ c = \dfrac{(v-1)v^2}{(v-2) \cdot (3v^2 + 3v + 2)} \end{cases} \quad \text{und} \quad (7)\begin{cases} a = \dfrac{-4v \cdot \sqrt{1 - v^2}}{(2v-1)(2v^2 + 3v + 3)} \\ b = -2\,\dfrac{v-1}{(2v-1)(2v^2 + 3v + 3)} \\ c = \dfrac{v-1}{(2v-1)(2v^2 + 3v + 3)}. \end{cases}$$

Die übrigen 3-fachen Punkte der Doppelkurven liegen demnach auf 2 Kurven, welche von den Ebenen $b - 2c = 0$ bzw. $b + 2c = 0$ aus der D.-F. ausgeschnitten werden.

Die geringe Ordnungszahl dieser Kurven erklärt sich natürlich daraus, daß dieselben 3-fache Kurven der D.-F. darstellen, längs deren sich 3 Flächenteile derselben durchsetzen. In jedem Punkt dieser Kurven schneiden sich 3 Paare Parameterkurven der D.-F. Seien

$$u = u_1$$
$$v = v_1$$

die in einem dieser 3 Flächenteile verlaufenden, sich in einem Punkt der 3-fachen Kurven schneidenden Parameterkurven, so bestimmen sich die Parameter λ_1, λ_3, $\lambda_5 = \lambda_6$ der sich in diesem Punkt schneidenden 3 Erzeugenden der betreffenden Diskriminantenfläche aus

$$(6a) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{u_1 + \sqrt{v_1^2 - 4v_1 - 1}}{2} \\ \lambda_3 = \dfrac{u_1 - \sqrt{v_1^2 - 4v_1 - 1}}{2} \\ \lambda_5 = \dfrac{-u_1}{1 + v_1}, \end{cases}$$

wobei u eine der beiden Wurzeln $\pm\sqrt{v_1^2 - 1}$ bedeutet, bzw. aus

$$(7a) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{u_1 + \sqrt{1 - 4v_1 - v_1^2}}{2} \\ \lambda_3 = \dfrac{u_1 - \sqrt{1 - 4v_1 - v_1^2}}{2} \\ \lambda_5 = \dfrac{u_1}{v_1 - 1}, \end{cases}$$

wobei unter u eine der Wurzeln $\pm\sqrt{1 - v_1^2}$ verstanden ist.

Dabei müssen sich für jeden der 3 sich in einem Punkt der 3-fachen Kurven schneidenden Paare Parameterkurven der D.-F.

$$\begin{matrix} u = u_1 \\ v = v_1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} u = u_2 \\ v = v_2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} u = u_3 \\ v = v_3 \end{matrix}$$

dieselben Werte für a, b, c und für λ_1, λ_3, λ_5 ergeben, gleichgültig, ob in obigen Formeln u_1, v_1 oder u_2, v_2 oder u_3, v_3 substituiert wird.

Die Substitutionen $u^2 = v^2 - 1$ bzw. $u^2 = -(v^2 - 1)$ in die Gleichung $R = 0$ ergeben die Gleichungen, vermittelst welchen zu einem gegebenen Parameterwert y die 3 Paare obige Parameterkurven $v = \text{const.}$, die sich in einem Punkt der 3-fachen Kurve schneiden, sich berechnen lassen. Man erhält bzw.

(6 b) $v^3(3y+2)+v^2(-3y-2)+v(-4y+4)-4y+4=0$

(Nur 3 reelle Wurzeln $|v|>1$ kommen in Betracht)

(7 b) $v^3(4y+4)+v^2(4y+4)+v(3y-2)-3y+2=0$

(Nur 3 reelle Wurzeln $|v|<1$ kommen in Betracht).

Da sich $R=0$ auf Gleichungen 3^{ten} Grades reduziert, so folgt daraus, daß der zu y gehörige, nicht isolierte räumliche Teil der Doppelkurve nur ein Paar 3-fache Punkte besitzen kann.

Die Diskriminante der ersten Gleichung ist

$$(3y+2)(y-1)(5y^2-4),$$

und die der zweiten

$$(3y-2)(y+1)(5y^2-4).$$

Die erste Gleichung hat 3 reelle Wurzeln

$$|v|>1, \quad \text{sobald} \quad -\tfrac{2}{3}>y>-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

und 1 reelle Wurzel

$$v>1, \quad \text{sobald} \quad y>1 \quad \text{oder} \quad y<-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

ist. Analog hat die zweite Gleichung 3 reelle Wurzeln

$$|v|<1, \quad \text{wenn} \quad \tfrac{2}{5}\sqrt{5}>y>\tfrac{2}{3}$$

und 1 reelle Wurzel

$$0<v<+1, \quad \text{wenn} \quad y<-1 \quad \text{oder} \quad y>\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

ist. Die durch obige Gleichungen definierten Abhängigkeiten zwischen y und v sind in Fig. 6 als Kurven graphisch dargestellt und mit D_1 bzw. D_2 bezeichnet worden. Die durch die erste der obigen Gleichungen definierte Kurve D_1 hat die Asymptoten

$$\begin{cases} v=+2 \\ y=-\tfrac{2}{3}; \end{cases}$$

ferner die Minima $\begin{cases} v=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y=-\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$ und $\begin{cases} v=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y=+\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$

und das Maximum $\begin{cases} v=0 \\ y=1. \end{cases}$

Analog hat die durch die zweite der obigen Gleichungen definierte Kurve D_2

$$\text{die Asymptoten } \begin{cases} v = +\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases};$$

$$\text{ferner die Maxima } \begin{cases} v = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = +\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}; \quad \begin{cases} v = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{und das Minimum } \begin{cases} v = 0 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Wir bemerken: die 2 Minima der ersten und die 2 Maxima der zweiten Kurve sind demnach Wurzeln von $v^4 - 3v^2 + 1 = 0$.

Der Radikand $v^2 - 4v - 1$ in den Ausdrücken für die Parameter λ ist negativ, sobald v im Intervall liegt:

$$2 - \sqrt{5} < v < 2 + \sqrt{5}$$

und analog wird $1 - 4v - v^2$ negativ, wenn v im Intervall liegt:

$$-2 + \sqrt{5} < v < -2 - \sqrt{5}.$$

Zu $v = 2 + \sqrt{5}$ im ersten Fall und zu $v = -2 + \sqrt{5}$ im zweiten Fall berechnen sich bzw.

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ y = +\frac{2}{5}\sqrt{5}. \end{cases}$$

Die dadurch bestimmten Schnittpunkte der ersten bzw. der zweiten Kurve mit der Kurve R in der yv-Ebene liegen also mit einem Minimum bzw. mit einem Maximum dieser Kurven in den Parallelen zur v-Achse

$$y = -\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \quad \text{bzw.} \quad y = +\tfrac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Jede Parallele zur v-Achse zwischen den Geraden

$$y = -\tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad y = -\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

einerseits und zwischen

$$y = +\tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad y = +\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

andererseits schneidet die Kurven D_1 bzw. D_2 in je 3 reellen Punkten. Die Abzissen v_1, v_2, v_3 dieser 3 Schnittpunkte geben offenbar die Werte der Parameterkurven $v = \text{const.}$ an, welche durch das einzige Paar 3-facher (nicht auf den Koordinatenebenen gelegene) Punkte hindurchgeht, welches der nicht isolierte Teil der Doppelkurve der

Fläche besitzt, deren Parameter y_0 der Parallelen zur v-Achse $y = y_0$ entspricht.

Die Parameterwerte v_1, v_2, v_3 der 3 Parameterkurven $v = \text{const.}$, welche durch einen 3-fachen Punkt der dem Parameter y entsprechenden Doppelkurve hindurchgehen, bestimmen sich aus den Gleichungen 3ten Grades (6b) oder (7b), je nachdem y negativ oder positiv ist, und in den oben besprochenen Intervallen liegt. Zu diesen 3 Parameterwerten müssen sich aus den Parametergleichungen (6) bzw. (7) der entsprechenden 3-fachen Kurven dieselben Werte für a, b, c ergeben, gleichgültig ob statt v, v_1 oder v_2 oder v_3 substituiert wird. Zu gegebenen Werten von b und c berechnen sich nun auch aus Gleichungen 3ten Grades

$$\begin{aligned}(3b-2)\cdot v^3+(-3b+2)\cdot v^2-4bv+4b&=0\\(3c-1)\cdot v^3+(-3c+1)v^2-4c\cdot v+4c&=0\end{aligned}\tag{6c}$$

bzw.

$$\begin{aligned}4bv^3+4b\cdot v^2+(3b+2)v-3b-2&=0\\4cv^3+4cv^2+(3c-1)v-3c+1&=0\end{aligned}\tag{7c}$$

die damit verträglichen Werte von v. Infolgedessen müssen die Koeffizienten dieser Gleichungen mit denen von (6b) bzw. (7b) übereinstimmen; y drückt sich demnach durch b bzw. c in folgender Weise linear aus:

$$\text{(6d)}\quad \begin{cases} b=2\dfrac{1-y}{5}\\ y=\dfrac{2-5b}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases} c=\dfrac{1-y}{5}\\ y=1-5c.\end{cases}$$

bzw.

$$\text{(7d)}\quad \begin{cases} b=-2\cdot\dfrac{1+y}{5}\\ y=-\dfrac{5b+2}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases} c=\dfrac{1+y}{5}\\ y=5c-1.\end{cases}$$

Zugegebenem a bestimmen sich ferner die dazugehörigen Werte von v aus (6) und (7) vermittelst der Gleichungen 6ten Grades

(6e) $9a^2v^6-18a^2v^5-(15a^2+16)v^4+(40a^2+16)v^2+32a^2v+16a^2=0$

(7e) $16a^2v^6+32a^2v^5+(40a^2+16)v^4-(15a^2+16)v^2-18a^2v+9a^2=0.$

Die Polynome auf den linken Seiten dieser Gleichungen müssen diejenigen von (6b) bzw. (7b) als Faktoren enthalten. Dies ist der Fall, wenn wir setzen

(6f) $a^2 = 4 \cdot \dfrac{3y^2 - y - 2}{25}$ bzw. (7f) $a^2 = 4 \cdot \dfrac{3y^2 + y - 2}{25}$.

Durch Kombination von (6f) mit (6d) bzw. von (7f) mit (7d) ergibt sich

$$(6\,g)\quad \begin{cases} -\dfrac{a^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{\left(c - \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 1 \\ -\dfrac{a^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{\left(b - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad (7\,g)\quad \begin{cases} -\dfrac{a^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{\left(c - \frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 1 \\ -\dfrac{a^2}{\frac{1}{3}} + \dfrac{\left(b + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Die 3-fachen Kurven der D.-F. sind demnach 2 in der Ebene $b - 2c = 0$ bzw. $b + 2c = 0$ liegende Hyperbeln. Jedoch ist nur ein Teil derselben nicht isolierte 3-fache Kurve auf der D.-F. Von der Hyperbel (6g) ist derjenige Teil des einen Astes 3-fache Kurve der D.-F., welcher von den Punkten desselben

$$\begin{cases} a = \pm \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{5}(1 + \sqrt{5})} = \pm 0{,}4552\ldots \\ b = +\frac{2}{2^5}(5 + 2\sqrt{5}) = +0{,}757776\ldots \\ c = \frac{1}{2^5}(5 + 2\sqrt{5}) = +0{,}37888\ldots \end{cases}$$

begrenzt wird und den Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

enthält und analog ist der von den Punkten

$$\begin{cases} a = \pm \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{5}(1 + \sqrt{5})} \\ b = -\frac{2}{2^5}(5 + 2\sqrt{5}) \\ c = \frac{1}{2^5}(5 + 2\sqrt{5}) \end{cases}$$

begrenzte und den Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = +\frac{1}{3} \end{cases}$$

enthaltende Teil eines der Äste der Hyperbel (7g) nicht isolierte 3-fache Kurve auf der D.-F.

Aus (6 a) bzw. (7 a) folgt, daß die 3 Doppelwurzeln λ_1, λ_3 und λ_5 sich als Wurzeln von

(6 h) $$\varrho^3 - \frac{uv}{1+v}\varrho^2 + \varrho + \frac{uv}{1+v} = 0$$

bzw. von

(7 h) $$\varrho^3 - \frac{uv}{v-1}\varrho^2 - \varrho - \frac{uv}{v-1} = 0$$

ergeben.

Setzen wir $\frac{uv}{1+v} = z$ bzw. $\frac{uv}{v-1} = z'$, so bestimmen sich z und z' als Funktionen von y durch Vergleich der Koeffizienten der Gleichungen

$$v^3 - v^2 - z^2\, v - z^2 = 0$$

bzw.

$$v^3 + v^2 + z'^2 v - z'^2 = 0$$

mit denjenigen von (6 b) bzw. (7 b). Man findet auf diese Weise, daß die Gleichungen (6 h) bzw. (7 h) ersetzt werden können durch

(6 f) $$|\sqrt{3y+2}|\varrho^3 - 2|\sqrt{y-1}|\varrho^2 + |\sqrt{3y+2}|\varrho + 2|\sqrt{y-1}| = 0$$

und

(7 f) $$2|\sqrt{y+1}|\varrho^3 - |\sqrt{3y-2}|\varrho^2 - 2|\sqrt{y+1}|\varrho - |\sqrt{3y-2}| = 0.$$

Ist y negativ und liegt es zwischen den Grenzen $-\frac{2}{3} > y > \frac{2}{5}\cdot\sqrt{5}$ oder ist es positiv und zwischen den Grenzen $\frac{2}{3} < y < +\frac{2}{5}\sqrt{5}$ gelegen, so bestimmen sich dazu aus der Gleichung (6 f) bzw. aus (7 f) die 3 reellen Doppelwurzeln λ_1, λ_3 und λ_5, welche die Gleichung (4) für das betreffende y hat, während die Werte der a, b, c aus (6 d), (6 f) bzw. aus (7 d), (7 f) berechnet werden.

Es bleibt noch die Diskussion der Anzahl und Lage der reellen Spitzen der Doppelkurven übrig.

Eine Doppelkurve hat in einem Punkt der D.-F. dann eine Spitze, wenn für die Parameterwerte u und v der durch den Punkt hindurchgehenden Parameterkurven die beiden Gleichungen

$$\varrho^2 - u\cdot\varrho + v = 0$$

und

$$(v^2 + u^2 v - 1)\varrho^2 + 2u(v^2 - 1)\varrho + v^3 - v - u^2 = 0$$

eine gemeinschaftliche Wurzel λ_0 besitzen.

Die Resultante der beiden Gleichungen reduziert sich auf

$$u^2 [9 v (1 - v^2)^2 + 4 u^2 (1 - v^2 + v^4) - u^4 v].$$

Beim Verschwinden des ersten Faktors haben beide Gleichungen die gemeinschaftlichen Wurzeln $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-v}$. Dadurch sind die Spitzen der ebenen Doppelkurven bestimmt, welche auf der Parameterkurve $u = 0$ der D.-F. liegen (pag. 41).

Bedeuten $a = 0$, b, c die Kordinaten der Punkte dieser Ellipse, so nimmt Gleichung (4) die Form an:

$$(b - c - y - 1) [\lambda^2 - \lambda_1^2]^3 = (b - c - y - 1) [\lambda^2 + v]^3 = 0.$$

Daraus ist ersichtlich, daß die Ellipse auch der Ort für die Schnittpunkte zweier Zweige der Rückkante der betreffenden Fläche ist (pag. 41).

Der Teil der Ellipse zwischen den Grenzpunkten

$$\begin{cases} b = + \frac{2}{5} \\ c = + \frac{1}{15} \end{cases} (v = \infty) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} b = - \frac{2}{5} \\ c = + \frac{1}{15} \end{cases} (v = 0),$$

welcher den Koordinatenanfangspunkt ($v = +1$) enthält, ist geometrischer Ort für diejenigen Koeffizientenwerte $a = 0$, b, c, für welche die Gleichung (4) zwei 3-fache, konjugiert rein imaginäre Wurzeln

$$\lambda_1 = + i \sqrt{v}$$
$$\lambda_2 = - i \sqrt{v}$$

besitzt.

Um zu untersuchen, zu welchen negativen Parameterwerten v sich für ein vorgegebenes y aus der Parametergleichung der Ellipse auf pag. 41 reelle Spitzen der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene bestimmen, substituieren wir $u = 0$ in die Gleichung $R = 0$ und finden, daß sich die betreffenden Parameterwerte v aus der Gleichung bestimmen:

$$(15 y + 10) v^3 + (3 y + 6) v^2 + (6 - 3 y) v - 15 y + 10 = 0.$$

Für $y = 0$ hat diese Gleichung nur eine reelle Wurzel $v = -1$. Da die Diskriminante der Gleichung, nämlich

$$- (48 y - 39 y^2 + 8),$$

für kein y positiv wird, so hat die Gleichung stets nur eine reelle Wurzel, welche negativ ist, wenn y zwischen den Grenzen liegt:

$$\tfrac{2}{3} > y > - \tfrac{2}{3}.$$

Für $y = \pm \frac{2}{3}$ hat die Gleichung die Wurzeln

$$v = 0 \quad \text{bzw.} \quad v = \infty.$$

Die ebenen Doppelkurven haben daher eine reelle Spitze, welche auf ihren nicht isolierten Teilen liegt, sobald $\frac{2}{3} > y > -\frac{2}{3}$ ist. Der Ort dieser Spitzen ist das von den Punkten

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{5} \quad (v = 0) \\ c = \frac{1}{15} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = +\frac{2}{5} \quad (v = \infty) \\ c = \frac{1}{15} \end{cases}$$

begrenzte Stück der Ellipse, deren Gleichung auf pag. 42 angegeben wurde, welches den Koordinatenanfangspunkt nicht enthält ($v = +1$). Da jeder Punkt dieses Teiles der Ellipse Schnittpunkt der Rückkehrkanten der betreffenden Fläche ist, so ist derselbe auch Ausgangspunkt der Spitze eines räumlichen Zweiges der Doppelkurve. Für die Parameterwerte $y = \pm \frac{2}{3}$ verschwindet der Schnittpunkt der Rückkehrkante. (Man vgl. Fig. 5.)

Kombiniert man den gleich Null gesetzten zweiten Faktor der obenstehenden Resultante mit der Gleichung $R = 0$ (pag. 42), indem man aus beiden Gleichungen u^2 eliminiert, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} &(v+1)^3(v-1)[-3(v^2-1)(v^2+1)^4 \cdot y^2 + \\ &+ 4(v^2+1)^2(v^6 - 5v^5 + v^4 + 5v^3 + v^2 - 5v + 1)y + \\ &+ 4(v-1)^3(v+1)(v^6 + 3v^4 - 10v^3 + 3v^2 + 1)]. \end{aligned}$$

Das Verschwinden der beiden ersten Faktoren hat für die Frage nach den Spitzen des nicht isolierten Teiles der einem bestimmten Parameter y entsprechenden Doppelkurve keine Bedeutung. Denn für $v = -1$ stimmt der gleich Null gesetzte zweite Faktor der Resultante auf pag. 64 überein mit der Gleichung $R = 0$ oder $u^2(u^2+4) = 0$, und für $\begin{matrix} v = -1 \\ u = 0 \end{matrix}$ hat Gleichung (4) im allgemeinen keine 3-fache Wurzel (pag. 53). Das Verschwinden des zweiten Faktors zeigt keinen nicht isolierten Punkt der betreffenden Diskriminantenfläche an (pag. 47). Der gleich Null gesetzte 3^{te} Faktor

$$\begin{aligned} &v^{10}[-3y^2+4y+4] + v^9 \cdot 4[-5y-2] + v^8 \cdot 3[-3y^2+4y+4] + \\ &+ v^7 \cdot 4[-5y-14] + v^6 \cdot 2[-3y^2+8y+44] + \\ &+ v^4 \cdot 2[3y^2+8y-44] + v^3 \cdot 4[-5y+14] + v^2 \cdot 3[3y^2+4y-4] + \\ &+ v[-5y+2] + 3y^2 + 4y - 4 \end{aligned}$$

liefert zu jedem vorgegebenen y die Parameterwerte der Kurven $v = \text{const.}$, welche durch die Spitzen der betreffenden Doppelkurve hindurchgehen.

Wir diskutieren zunächst die durch diese Gleichung definierte Kurve in der yv-Koordinatenebene.

Wir haben dieselbe in Fig. 6 eingezeichnet und dort kurz mit S bezeichnet.

Da die Diskriminante des obenstehenden in y quadratischen Polynoms nie negativ wird, so besteht die Kurve S aus 2 Zweigen, von welchen jeder von einer Geraden in der yv-Ebene: $v = \text{const.}$ in einem reellen Punkte geschnitten wird.

Die Kurve S hat die Asymptoten

$$v = \pm 1$$
$$y = +2$$
$$y = -\tfrac{2}{3}$$

und schneidet die v-Achse in den reellen Punkten

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -1 \\ v_2 &= +0{,}6722\ldots \\ v_3 &= +1{,}4822\ldots \\ v_4 &= +1 \end{aligned}\right\}.$$

In letzterem Punkt hat S einen Wendepunkt mit der v-Achse als Wendetangente. Die y-Achse wird von S in den Punkten geschnitten:

$$y_1 = \tfrac{2}{3}$$
$$y_2 = -2.$$

Die Frage nach den Maxima und Minima der Kurve S ist identisch mit der Frage nach den Wurzeln einer reduktibeln Gleichung 36^{ten} Grades, welche sich auf die Form bringen läßt:

$$(v^2+1)^6\,(v^2-v+1)^4\,(v-1)^2\,(v^4-3v^2+1)\,(v^{10}+6v^9-10v^8- \\ -36v^7-10v^6-8v^5-10v^4-36v^3-10v^2+6v+1)=0.$$

Die ersten beiden Faktoren zeigen kein reelles Extrem der Kurve S an, und im Punkt $v = 1$, $y = 0$ hat die Kurve, wie oben bemerkt wurde, einen Wendepunkt.

Der 4^{te} Faktor ist schon bei der Frage nach den Extremen der Kurven D_1 und D_2 aufgetreten (pag. 60). Man überzeugt sich, daß zu den Wurzelwerten dieses Faktors

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ v_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ v_3 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ v_4 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right\} \text{ die Ordinaten der Kurven } S \text{ gehören: } \left\{\begin{aligned} y_1 &= -\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \\ y_2 &= +\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \\ y_3 &= -\tfrac{2}{5}\sqrt{5} \\ y_4 &= +\tfrac{2}{5}\sqrt{5}. \end{aligned}\right.$$

In diesen Punkten hat die Kurve S ebenso wie die Kurven D_1 und D_2 Extreme, und zwar fallen Maxima und Minima der Kurve S wieder auf Maxima und Minima von D_1 und D_2. Auch das Polynom 10^{ten} Grades auf der linken Seite der obigen Gleichung ist schon früher aufgetreten, und zwar bei der Bestimmung der Extreme der Kurve Δ auf pag. 44. Auch die Nullstellen dieses Polynomes sind Extreme v für die Kurve S, deren Ordinaten y mit den entsprechenden der Kurve Δ zusammenfallen. Und zwar sind die Punkte (pag. 44)

$$v_2,\ y_2,\ \ v_3,\ y_3,\ \ v_4,\ y_4 \text{ Maxima}$$

und die Punkte

$$\frac{1}{v_2},\ -y_2,\ \frac{1}{v_3},\ -y_3,\ \frac{1}{v_4},\ -y_4 \text{ Minima}$$

für die Kurve S.

Um die Anzahl der reellen Spitzen des nicht isolierten Teiles der einem bestimmten Parameter y_0 entsprechenden Doppelkurve festzustellen, bestimmen wir die Anzahl der reellen Schnittpunkte der Parallelen $y = y_0$ zur v-Achse der yv-Ebene mit der Kurve S.

Wir bemerken, daß das erste und letzte Glied in der Gleichung 2^{ten} Grades in u^2:

$$u^4 v - 4u^2(1 - v^2 + v^4) - 9v(1 - v^2)^2 = 0$$

für jeden reellen Wert des Parameters v, ausgenommen

$$v = \pm 1, \quad v = 0$$

entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die durch obige Gleichung auf der D.-F. definierte Kurve wird demnach von jeder Parameterkurve $v = \text{const.}$ in einem und nur einem bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrischen reellen Punktepaare geschnitten.

Jede Parameterkurve $v = \text{const.}$ auf der D.-F. kann daher höchstens 1 reelles Spitzenpaar des nicht isolierten Teiles einer beliebigen Doppelkurve ausschneiden. Da jede Gerade $v = v_0$ in der yv-Ebene die Kurve S immer in 2 reellen Punkten schneidet, so kann deshalb immer nur einer derselben eine Spitze derjenigen Doppelkurve andeuten, welche dem Ordinatenwert y_0 des Schnittpunktes entspricht. In Fig. 6 ist unschwer zu erkennen, welchem der beiden auf einer Parallelen zur v-Achse geschnittenen Zweigen der Kurve S ein reelles Spitzenpaar der betreffenden Doppelkurve entspricht. Teilen wir nämlich die gesamte yv-Ebene in 4 Teile ein, welche von den Parallelen zur y-Achse

$$v = -\infty$$
$$v = -1$$
$$v = 0$$
$$v = +1$$
$$v = +\infty$$

begrenzt sind, und betrachten den Verlauf der beiden Zweige der Kurve S innerhalb jedes dieser Teile, so bleibt immer einer der beiden Zweige innerhalb der Gebiete G_1 oder G_2, während der andere Zweig innerhalb dieser Teile von dem Gebiet G_1 oder G_2 auch in das Gebiet G_0 eindringt. Letzterer ist für die Bestimmung eines reellen Spitzenpaares der Doppelkurve unbrauchbar. Der andere Zweig der Kurve S ist in Fig. 6 stark eingezeichnet und wird von einer Parallelen $y = y_0$ in 0, 1, 3, 4, 2 Punkten geschnitten, wenn y_0 bzw. in den Intervallen liegt:

$$|y_0| > 2$$
$$2 > |y_0| > \tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$
$$\tfrac{2}{5}\sqrt{5} > |y_0| > \tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{2}{3} \geqq |y_0| \geqq 0{,}6125\ldots \quad \text{oder} \quad 0{,}005936\ldots > |y_0| > 0$$
$$0{,}6125\ldots > |y_0| > 0{,}005936\ldots$$

Diese Zahlen für die reellen Schnittpunkte geben auch die Anzahlen der reellen Spitzenpaare des nicht isolierten Teiles der dem Parameter y_0 entsprechenden Doppelkurve an. Bezüglich der Schnittpunkte der v-Achse mit der Kurve S vgl. man pag. 71.

§ 6.

Graphische Verfolgung der Flächenentwicklung.

Die in den Figg. 1, 2, 2a, 3 verzeichneten Rückkehrkanten der Flächen der Schar vermitteln einigermaßen eine Vorstellung von ihrer gegenseitigen Lage im Raum. Die im vorausgehenden Paragraphen durchgeführten Rechnungen müssen, wenn sie zu einem Überblick über die Gestalt der den verschiedenen Parametern y entsprechenden Flächen dienen sollen, notwendigerweise durch eine größere Anzahl wirklich konstruierter Ansichten ergänzt werden.

Zu diesem Zweck haben wir eine passende Auswahl unter den unendlich vielen Flächen der Schar getroffen und die Projektionen derselben auf die 3 Koordinatenebenen graphisch dargestellt. Besonders komplizierte Teile dieser Flächen sind zur besseren Sichtbarkeit für sich dargestellt und ihre Entwicklung für variable Parameter y gesondert verfolgt worden.

Zur Konstruktion der Bilder sind die Projektionen derjenigen Erzeugenden der Flächen verwendet worden, welche den Parametern

$$x = 0, \quad \pm\frac{\pi}{36}, \quad \pm\frac{2\pi}{36} \text{ etc.}$$

entsprechen und deren Gleichungen sich für diese Werte des Parameters x aus den allgemeinen Gleichungen der Projektionen der Erzeugenden auf die ab-, bc-, ac-Koordinatenebene

$$a[5\cos x - \cos 5x] + b[5\sin x + \sin 5x] + 2\sin 4x + 4\sin 2x - \\ - 6y\sin 3x = 0$$

$$4b + c[5\cos x - \cos 5x] + \cos 3x + 3\cos x - 4y\cos 2x = 0$$

$$4a - c[5\sin x + \sin 5x] + \sin 3x + 3\sin x - 4y\sin 2x = 0$$

ergeben.

Zur Konstruktion der Ansichten der Doppelkurven der Flächen sind die Projektionen der Schnittfiguren der Flächen mit Ebenen parallel zur ab-, bc- und ac-Koordinatenebene auf diese Ebenen benützt worden, deren Gleichungen wir in Parameterform ebenfalls angeben wollen:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{2\cos^2 x + 1}{2}\sin x + \sin 2x\, y + \dfrac{c}{2}\sin x[8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3] \\ b = -\cos^3 x + y\cdot\cos 2x - c\cdot\cos^3 x(5 - 4\cos^2 x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{-8\cos^3 x}{8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3} + \dfrac{3y\sin 3x + 2a\cos^3 x(4\cos^2 x - 5)}{\sin x\,[8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3]} \\ c = \dfrac{2\cos^2 x + 1 - 4y\cos x}{8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3} + \dfrac{2a}{(8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3)\sin x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{2\sin 2x\cos x}{8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 1} + \dfrac{-3\sin 3x\cdot y + \sin x\cdot b(8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 3)}{2\cos x\,(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 1)} \\ c = \dfrac{\cos^2 x}{8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 1} + \dfrac{-y\cos 2x + b}{\cos x\,(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 1)}. \end{cases}$$

Es ist nicht zweckmäßig, den Parameter $\lambda = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ in die obigen Formeln einzuführen, welche dadurch nur unübersichtlicher werden. Mit Hilfe der auf den letzten Tafeln des Anhanges verzeichneten Figuren bietet die Diskussion dieser Schnittkurvensysteme keine Schwierigkeit, weshalb wir nicht darauf eingehen.

Es wird uns nun besonders darauf ankommen, zu jedem Stück der in der Fig. 6 verzeichneten Kurven R, D_1, D_2, S die Entwicklung der entsprechenden Singularität im Bilde darzustellen.

Um die Besprechung der Ansichten zu erleichtern, haben wir einzelne Flächenstücke vor und nach ihrer Durchdringung mit anderen Flächenstücken durch gleiche Schraffur und gleiche Numerierung gekennzeichnet. Wir bezeichnen eine Doppelkurve oder Rückkehrkante, längs welcher 2 Flächenteile, z. B. 1 und 2, sich durchdringen bzw. zusammenstoßen, kurz mit $d(1, 2)$ bzw. $r(1, 2)$, und eine Konturlinie, welche 2 Flächenteile 1 und 2 bloß in einer Ansicht voneinander trennt, mit $k(1, 2)$.

Die Figg. 7a, 7b, 7c auf Tafel IV zeigen drei Ansichten der dem Parameter $-A = y = 0$ entsprechenden Fläche der Schar, welche, abgesehen von einer homogenen Deformation und von ihrer Lage bezüglich des Koordinatensystems, nicht verschieden ist von der in den Figuren 1, 2, 2a, 3 dargestellten Diskriminantenfläche. Man vergleiche darin die dem Parameter $y = 0$ entsprechende Rückkehrkante.

Der auf der Achse der positiven a-Koordinaten liegende Zweig der räumlichen Doppelkurve der Fläche ist durch die Fig. 7f (Tafel II) veranschaulicht worden, welche die Projektion dieses Zweiges auf die ab-Koordinatenebene darstellt.

Die Abszissen der einfachen Schnittpunkte der in der Fig. 6 verzeichneten Kurve S mit der positiven v-Achse, nämlich

$$v_1 = + 1{,}4822\ldots$$
$$v_2 = + 0{,}6722\ldots,$$

geben die Parameterwerte der Kurven $v = \text{const.}$ der D.-F. an, welche durch die beiden nicht auf der ac-Koordinatenebene liegenden Spitzen dieses Zweiges der Doppelkurve hindurchgehen.

Man findet für

$$v = + 0{,}6722: \begin{cases} a = + 0{,}938\ldots \\ b = + 0{,}045\ldots \\ c = - 0{,}3365\ldots \end{cases}$$

und für

$$v = + 1{,}4822: \begin{cases} a = + 0{,}938\ldots \\ b = - 0{,}045\ldots \\ c = - 0{,}3365\ldots \end{cases}$$

Im Punkt

$$\begin{cases} y = 0 \\ v = + 1 \end{cases}$$

hat die Kurve S einen Wendepunkt mit der v-Achse als Wendetangente, durch welchen Punkt auch A und R hindurchgehen.

Die Parameterkurve $v = + 1$, also die in der ac-Ebene liegende elliptische Doppelkurve der dem Parameter $y = 0$ entsprechenden Fläche, berührt demgemäß den in der Figur verzeichneten Zweig der räumlichen Doppelkurve in einer im Punkt

$$a = + 0{,}8, \quad b = 0, \quad c = - 0{,}2$$

der ac-Ebene liegenden Spitze derselben (pag. 49). Spitzentangente ist die dem Parameter $x = -\frac{\pi}{2}$ entsprechende Erzeugende, welche Rückkehrkante der Fläche ist und zugleich auch die Spitzentangente der in diesem Punkt stattfindenden Spitze der Rückkehrkanten $r(5', 8)$ und $r(2', 7)$ darstellt. Die Parameterkurve $v = + 1$ wird aber auch noch von dem in der Fig. 7 d verzeichneten räumlichen Zweig der Doppelkurve im Punkt

$$a = + 9{,}414\ldots, \quad b = 0, \quad c = - 0{,}335\ldots$$

senkrecht durchstoßen.

Dieser Punkt ist Doppelpunkt der Doppelkurve, und es schneiden sich in ihm die in der Tangentialebene $1 + \sqrt{2} \cdot a - c = 0$ liegenden den Parametern $x = \pm\frac{3\pi}{4}$ entsprechenden Erzeugenden.

Die Kurve S schneidet die negative v-Achse im Punkt mit der Abszisse $v = -1$.

Die Parameterkurve $v = -1$ verläuft auf der D.-F. wesentlich im Unendlichen, und ist für jedes von 0 verschiedene u durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{-4u}{u^2-4} & a &= \infty \\ c &= -\frac{u^2+4}{u^2-12} & b &= \infty \end{aligned}\right\}$$

definiert.

Ausgenommen sind die Parameterwerte $u = \pm 2$, welche den Punkt der D.-F.

$$a = \infty, \quad b = 0, \quad c = 1$$

bestimmen.

Die Gesamtheit der Flächenpunkte

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = -1 \end{cases}$$

stellt außerdem auf der D.-F. die Gerade dar:

$$a = 0, \quad b = y, \quad c = \tfrac{1}{3},$$

welche Ort der Doppelpunkte der Doppelkurven ist, in welchen sich die den Parametern $x = \pm \frac{\pi}{2}$ entsprechenden Erzeugenden der betreffenden Fläche schneiden. Für $y = 0$, $v = -1$ erhalten wir aus $R = 0$, $u = 0$. Dadurch ist derjenige Punkt der Fläche bestimmt, in welchem sich die beiden in der ac-Ebene verlaufenden Rückkehrkanten der Fläche schneiden. Die in der bc-Ebene verlaufende Doppelkurve der Fläche bildet dort eine Spitze (pag. 53). Der Teil der Fläche, welcher diesen singulären Punkt enthält, ist auf den schematischen Figg. 7 d und 7 e auf Tafel II gesondert dargestellt worden. Fig. 7 d stellt die Projektion dieses Flächenteiles auf die ac-Koordinatenebene und Fig. 7 e diejenige auf die ab-Koordinatenebene dar. Entsprechende sich durchdringende Flächenteile sind übereinstimmend mit den Figg. 7 b und 7 c (Tafel IV) gekennzeichnet. Die obere Figur stellt überdies noch die Ansicht der Flächenteile dar, welche in den Zweigen der Rückkehrkante zusammenstoßen, die im Punkt

$$a = 0, \quad b = -1{,}6, \quad c = +0{,}6,$$

eine Spitze bilden.

Die Fig. 8c (Tafel II), welche mit Fig. 7f (Tafel II) zu vergleichen ist, stellt dar, wie sich für wachsende Parameter y der auf der letzteren Figur dargestellte Teil der Doppelkurve verändert. Der Doppelpunkt verschwindet (pag. 53), und der in Fig. 7f dargestellte räumliche Zweig der Doppelkurve verbindet sich mit dem ebenen Zweig derselben und es entstehen 2 getrennte räumliche Teile. Einer davon (Fig. 7f) entsteht aus den 3 Kurvenstücken $d(2, 8)$, $d(2, 5')$ und dem von den Punkten

$$\begin{cases} a = +0{,}8 \\ b = 0 \\ c = -0{,}2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} a = +0{,}9414\ldots \\ b = 0 \\ c = -0{,}335 \end{cases}$$

begrenzten Stück von $d(2, 5)$, und bildet einen geschlossenen Teil für sich mit 2 reellen Spitzen. Dieser Teil wird, wie aus dem Folgenden hervorgeht, für wachsende Parameter y verschwinden. Der andere Teil entsteht dadurch, daß sich die beiden Stücke des räumlichen Zweiges der Doppelkurve $d(2', 5)$ und $d(5, 7)$ mit dem ebenen Stück von $d(2', 5')$ zu einem Zweig zusammensetzen, welcher mit dem symmetrischen auf der Seite der negativen a-Koordinaten verlaufenden Zweig in Verbindung steht und in 2 bezüglich der bc-Ebene symmetrischen Rückkehrkantenspitzen in seinem nicht isolierten Verlauf endigt. Diese Entwicklung wird in Fig. 6 (Tafel I) durch den Verlauf folgender Kurvenstücke bestätigt.

Die Parallele zur v-Achse $y = +0{,}0025$ schneidet S auf der Seite der positiven v in 3 Punkten mit den Abszissen

$$\begin{cases} v_1 = +0{,}707\ldots \\ v_2 = +0{,}815\ldots \\ v_3 = +1{,}49\ldots \end{cases}$$

Die Parallele $y = +0{,}0059$ berührt sowohl S als auch Δ im Punkt $v_1 = v_2 = +0{,}7562\ldots$ (pag. 44), und schneidet S weiter in $v_3 = 1{,}51\ldots$, und für größere Werte von y werden die Schnittpunkte mit den Abszissen, welche v_1 und v_2 entsprechen, imaginär. Die Abszissen v_1 und v_2 entsprechen offenbar den Parameterkurven

$$\begin{cases} v = v_1 \\ v = v_2, \end{cases}$$

welche durch diejenigen beiden Spitzen des Zweiges der Doppelkurve hindurchgehen, welcher für wachsende Parameter y verschwindet.

Diese beiden Spitzen entstehen und verschwinden ersichtlich dadurch, daß $r(5', 8)$ (man vergleiche Fig. 8c) das Flächenstück 2 für $y = +0{,}0025$ in 2 Punkten durchstößt, für $y = +0{,}005936$ berührt und für größere Werte der Parameter y daran vorbeigeht. Aus diesem Grunde ist geometrisch einzusehen, daß die beiden Kurven Δ und S im Punkt

$$\begin{cases} v = +0{,}7562\ldots \\ y = +0{,}005936\ldots \end{cases}$$

der yv-Ebene ein gemeinschaftliches Maximum haben müssen. Die Parameterkurve $v = v_3$ schneidet die Spitze des zweiten in Fig. 8c verzeichneten Zweiges der Doppelkurve aus, welche dadurch entsteht, daß $r(7, 2')$ den Flächenteil 5 durchstößt. Die Kurve R wird von der Parallelen $y = +0{,}0025$ in einem Punkt mit der Abszisse $v_4 = 1{,}295\ldots$ geschnitten. Die Parameterkurve $v = v_4$ schneidet offenbar die Rückkehrkantenspitze aus (natürlich auch die bezüglich der bc-Koordinatenebene dazu symmetrische), in welchem der soeben erwähnte Zweig der Doppelkurve in seinem nicht isolierten Teile endigt und welche durch $r(7, 8)$ und $r(8, 5')$ gebildet wird.

Die Parallele zur v-Achse $y = +0{,}0025$ schneidet die Kurve S in einem weiteren Punkt mit der Abszisse $v_5 = -0{,}994\ldots$ Dieser Schnittpunkt entspricht einem weiteren reellen Spitzenpaar der Doppelkurve. Die Entstehungsweise desselben erkennt man ohne weiteres durch Vergleich der Figg. 7d und 7e mit den Figg. 8a bzw. 8b.

Die Schnittpunkte der beiden zu $x = \pm\frac{\pi}{2}$ gehörigen Erzeugenden der Flächen wandern für wachsende Parameter in der Richtung der abnehmenden b-Koordinaten auf der Geraden

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -y \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$

fort (pag. 53), während die Erzeugenden selbst in der Ebene $b + y = 0$ verlaufen und für von 0 verschiedene Werte von y nicht mehr Teile der Rückkehrkante darstellen. Die geradlinigen Teile der Rückkehrkante gehen vielmehr in krummlinige Kurventeile über, und die den Parametern $x = \pm\frac{\pi}{2}$ entsprechenden Erzeugenden der Fläche sind Asymptoten derselben. Im Schnittpunkt der Rückkehrkanten $r(5, 2)$ und $r(4, 3)$ besitzt sowohl die in der bc-Ebene

liegende Doppelkurve 4^{ter} Ordnung der Fläche eine Spitze (pag. 64 und 40) als auch ein räumlicher Zweig der Doppelkurve, welcher für $y = 0$ aus dem einzigen Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

nämlich aus dem Schnittpunkt der beiden stationären Erzeugenden besteht. Dieser Zweig durchsetzt die ebene Doppelkurve im Schnittpunkt der beiden obigen Erzeugenden aus Gründen der Symmetrie senkrecht und es entsteht ein Doppelpunkt der Doppelkurve (pag. 53), in dessen Umgebung sich die Flächenteile 4 und 5 kreuzweise durchdringen. Die beiden Zweige der Rückkehrkante $r(5, 2)$ und $r(4, 3)$ durchstoßen die Flächenteile 4 und 5 außer in ihrem Schnittpunkt in einem Punktepaar, welches das Paar der oben erwähnten Spitzen darstellt, welches durch die Parameterkurve

$$v = v_5 = -0{,}994\ldots$$

aus der Doppelkurve ausgeschnitten wird. Aus dem Verlauf der Kurve S in Fig. 6 (Tafel I) von ihrem Schnittpunkt mit der negativen v-Achse ($v = -1$) aus in Richtung der zunehmenden v kann das Verhalten dieses Spitzenpaares für wachsende Parameter y bestätigt werden. Fig. 8b (Tafel II), welche aus der entsprechenden Fig. 7e (Tafel II) hervorgeht, zeigt den Schnittpunkt der Rückkehrkanten $r(5, 2)$ und $r(4, 3)$ und die dadurch hervorgerufene Flächendurchdringung von einem Punkt der positiven c-Achse aus gesehen.

Der Durchstoßpunkt von $r(2', 7)$ mit dem Flächenteil 5 (Fig. 8c, Tafel II) nähert sich für wachsende Parameterwerte y der dem Parameter $x = -\frac{\pi}{6}$ entsprechenden Erzeugenden der Fläche, wobei sich jedoch seine Entfernung von dem bezüglich der bc-Koordinatenebene symmetrischen Durchstoßpunkt verringert; dagegen entfernt sich die Rückkehrkantenspitze $[r(8, 7),\ r(8, 5')]$ mit wachsendem Parameter y von der bc-Koordinatenebene in einer Richtung, welche der zum Parameter $x = -\frac{2\pi}{3}$ gehörigen Erzeugenden der Fläche entspricht. Dem Verlauf dieser beiden Singularitäten im Raum entspricht in Fig. 6 (Tafel I) derjenige der Kurvenstücke S bzw. R, welche sich von den Schnittpunkten derselben mit der v-Achse

$$v = +1 \quad \text{bzw.} \quad v = +1{,}4822\ldots$$

nach der Seite der zunehmenden v erstrecken. Aus dem Verlauf dieser Kurvenstücke erkennt man, daß das soeben erwähnte Spitzenpaar der Rückkehrkante für alle positiven Werte des Parameters y bestehen bleibt, während das Spitzenpaar der Doppelkurve für den Parameterwert $y = +2$, wozu $v = +\infty$ gehört, in seinem reellen Teil abschließt, worauf wir auf pag. 85 näher zu sprechen kommen.

Die Figg. 9a, 9b und 9c auf Tafel IV und die Teilfiguren $9a_1$, $9b_1$ und $9c_1$ auf Tafel V stellen 3 Ansichten der dem Parameter $y = +0{,}5$ entsprechenden Fläche dar. Die soeben besprochenen Paare Rückkehrkantenspitzen und Durchstoßpunkte der Rückkehrkanten haben sich in der angegebenen Weise in ihrer Lage weiter verändert, und der dazugehörige Zweig der Doppelkurve hat größere Ausdehnung gewonnen.

Die Rückkehrkantenspitze $[r(1, 2), r(1, 3)]$ schreitet mit wachsendem Parameter y in Richtung der zunehmenden b-Koordinaten (man vergleiche die Figg. 7c und 9c auf Tafel IV) und die den Parametern $x = \pm \frac{\pi}{2}$ entsprechende Tangentialebene in Richtung der abnehmenden b-Koordinaten vorwärts, so daß es mit zunehmendem Parameter y zu einer komplizierten Durchdringung von Flächenteilen kommt.

Fig. 9d (Tafel II) ist als Fortsetzung von Fig. 8a (Tafel II) zu betrachten. Man sieht, daß sich die Rückkehrkanten $r(1, 3)$ und $r(1, 2)$ in der Richtung der zunehmenden, die Rückkehrkanten $r(5, 2)$ und $r(4, 3)$ in der Richtung der abnehmenden b-Koordinaten mit wachsendem Parameter y vorwärtsschieben, während die Entfernung zwischen dem Schnittpunkt der den Parametern $x = \pm \frac{\pi}{2}$ entsprechenden Erzeugenden und demjenigen der Rückkehrkanten $r(5, 2)$ und $r(4, 3)$ dabei immer größer wird, so daß sich auch die Durchstoßpunkte der Rückkehrkanten $r(5, 2)$ mit 4 und $r(4, 3)$ mit 5 immer weiter von ihrem Schnittpunkt entfernen. Der den Doppelpunkt enthaltende Zweig der Doppelkurve gewinnt auf diese Weise an Ausdehnung.

Die schematische Fig. 10 (Tafel II) ist mit 9d, 8a und 7d (derselben Tafel) zu vergleichen. Durch das oben besprochene Vordringen der Rückkehrkanten werden die in den Figuren sichtbaren Flächenteile 2 und 3 zwischen denselben immer kleiner, und der Zweig der Doppelkurve, längs welchem sich 3 und 5 bzw. 2 und 4 durchdringen, wird immer langgestreckter. Die Konturlinien $k(2, 1)$

und $k(3, 1)$ stellen die den Parametern $x = \pm \frac{\pi}{4}$ entsprechenden Erzeugenden der Flächen dar. Der in Rede stehende Zweig der Doppelkurve berührt diese Erzeugenden für einen Parameterwert $0{,}5 < y < 0{,}6$, und schneidet sie für größere Parameterwerte in je 2 reellen Punkten, wie in Fig. 10 zu bemerken ist. Für wachsende Parameterwerte y entfernen sich diese beiden Schnittpunkte voneinander; die Projektionen dieses Zweiges der Doppelkurve auf die ac-Koordinatenebene greifen für wachsende Parameter immer weiter über die Konturlinien $k(1, 2)$ und $k(1, 3)$ hinüber. Schließlich berührt der Zweig die Rückkehrkanten $r(1, 2)$ und $r(1, 3)$. Diese Rückkehrkanten berühren ihrerseits in diesem Fall die Flächen 4 bzw. 5 und durchstoßen sie für größere Parameter y, so daß auf diese Weise 2 Spitzenpaare der Doppelkurve entstehen.

Die Rechnung bestätigt diesen Vorgang insofern, als die Kurves der Fig. 6 (Tafel I) im Punkt

$$\begin{cases} y = 0{,}6125\ldots \\ v = -0{,}149\ldots \end{cases}$$

der yv-Ebene ein Minimum besitzt. Dieses Minimum von S fällt mit einem Maximum von Δ zusammen, welche Kurve in diesem Punkt die Gebiete G_0 und G_2 voneinander trennt (pag. 44 und 67). Das hat die Bedeutung, daß die Parameterkurve $v = -0{,}149\ldots$ die Doppelkurve in höherer Ordnung in diesem Punktepaare der Fläche berührt [1]). Die schematische Fig. 11 (Tafel II) stellt die Projektion der in Betracht kommenden Flächenteile auf die ac-Koordinatenebene für den Fall des Parameters $y = +0{,}6125\ldots$ dar. Der Vergleich dieser Figur mit Fig. 10 (Tafel II) zeigt, wie die Flächen 2 und 3 zwischen $r(2, 5)$ und $r(2, 1)$ bzw. $r(3, 4)$ und $r(3, 1)$ in Richtung der positiven c-Koordinaten verschoben werden. Die Krümmung der beiden Zweige der Rückkehrkanten $r(2, 5)$ und $r(3, 4)$ verkleinert sich mit wachsendem Parameter y in ihrem Schnittpunkt. Durch Vergleich der Figg. 11 und 12 erkennt man, wie durch die Durchstoßung der Flächen 4 und 5 durch die Rückkehrkanten $r(1, 2)$ bzw. $r(1, 3)$ die Fläche 1 in die Flächen 4 und 5 längs zweier Kurvenstücke $d(1, 4)$ und $d(1, 3)$ eindringt,

---

[1]) Daß das ebenerwähnte Minimum der Kurve S gerade auf den Fall der Berührung dieser beiden Flächenteile durch Rückkehrkanten Bezug hat, wird der weitere Verlauf der Flächenentwicklung bestätigen.

die sich gegenseitig schließlich für wachsende Parameterwerte y in einem Punkt der bc-Koordinatenebene berühren. Für diesen Fall ist Fig. 12 (Tafel II) gezeichnet worden. Die schematische Fig. 13 (Tafel II) zeigt, wie durch das weitere Vordringen des Flächenteiles 1 in die Teile 4 und 5 aus diesem Berührpunkt 2 in der bc-Koordinatenebene liegende 3-fache Punkte der Doppelkurve entstehen. Die Durchdringungsverhältnisse der Flächenteile, wie sie Fig. 12 darstellt, entsprechen demnach (pag. 56) dem Parameter $y = 0{,}61805\ldots$, und diejenigen der Fig. 13 sind für den Parameter $y = 0{,}63$ veranschaulicht worden.

Durch das genannte Vordringen des Flächenteiles 1 in die Teile 4 und 5 ist ein von den Flächenteilen 1, 4 und 5 und den Durchdringungslinien derselben $d(4, 5)$, $d(1, 5)$ und $d(1, 4)$ (welche sich alle drei in jedem der beiden 3-fachen Punkte durchsetzen) begrenzter geschlossener Raum entstanden. Der Entstehungspunkt desselben ist nach dem Obigen der Berührpunkt der 3 Doppelkurvenstücke $d(1, 5)$, $d(1, 4)$ und $d(4, 5)$, welcher die Koordinaten hat:

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{5}(5 - \sqrt{5}) = -0{,}53278\ldots \\ a = 0 \\ c = \frac{1}{10}(5 - 3\sqrt{5}) = 0{,}17083\ldots \end{cases}$$

Für diese Werte von a, b, c und von

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

hat Gleichung (4), § 5 die 3 Doppelwurzeln

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_3 &= +\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = +0{,}7265\ldots \\ \lambda_5 &= -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = -0{,}7265\ldots \end{aligned}\right\}.$$

Es hat keine Schwierigkeiten, die Koordinaten eines in der bc-Koordinatenebene und in dem entstandenen neuen Flächenraum gelegenen Punktes für einen benachbarten Parameter, z. B. $y = +0{,}63$, anzugeben, und zu zeigen, daß die Gleichung (4) von § 5, welche dann in eine Gleichung 3^{ten} Grades in λ^2 übergeht, keine positiven Wurzeln für diese Werte der Koordinaten und des Parameters y besitzt, daß also dieser neu entstandene Raum **mit** R_3 identisch ist in welchen keine reelle Tangentialebene der Fläche eindringt. Fast

zu jeder der schematischen Figuren sind auch einige passend gewählte Schnitte der Flächen mit Ebenen parallel zur ab-Koordinatenebene zur Orientierung über die Lage der Räume R_0, R_1, R_2, R_3 schematisch herausgezeichnet worden[1]).

Der Vergleich dieser und der übrigen auf den exakt konstruierten Ansichten der Flächen vorhandenen Schnittfiguren, läßt auch erkennen, daß

$$|y| = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

den kleinsten Parameterwert bedeutet, für welchen ein Raum R_3 entstehen kann. Gleichung (4) von § 5 hat stets mindestens 2 reelle Wurzeln, solange

$$|y < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ist, was für reelle Werte a, b und c auch sein mögen. In dem obigen Berührpunkt der 3 Zweige der Doppelkurve hängen die Räume R_0, R_1 und R_2 miteinander zusammen (Fig. 12), und in den 3-fachen Punkten der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene kommunizieren sämtliche 4 Räume miteinander (Fig. 13).

Der Vergleich der Fig. 13 mit den vorausgehenden zeigt, daß die in der Figur sichtbaren beiden Spitzenpaare der Doppelkurve sich für wachsende Werte des Parameters y voneinander entfernen und daß sich die Rückkehrkanten $r(1, 2)$ und $r(1, 3)$ dabei enger an ihre Asymptoten, also an die den Parametern $x = \pm\frac{\pi}{6}$ entsprechenden Erzeugenden anschmiegen.

Bereits in § 4 haben wir nachgewiesen, daß die dem Parameter

$$y = \tfrac{3}{8}\sqrt{3} = 0{,}6495\ldots$$

entsprechende Fläche die Eigenschaft hat, daß ihre Rückkehrkante die zu den Parametern $x = \pm\frac{\pi}{6}$ gehörigen Erzeugenden in sich aufnimmt, was in der Reihe der Teilfiguren der Fig. 5 (Tafel I) veranschaulicht ist.

Die schematische Fig. 14 d (Tafel III) zeigt für diesen Fall des Parameters die der Fig. 13 entsprechende Flächendurchsetzung. Die beiden Zweige der Rückkehrkante $r(2, 1)$ und $r(3, 1)$, welche

[1]) Die Teile der Schnittebenen, welche die Räume R_0, R_1, R_2, R_3 durchsetzen, sind durch die Ziffern 0, I, II, III gekennzeichnet.

von der auf der Figur sichtbaren Rückkehrkantenspitze in der bc-Ebene ausgehen, und die beiden anderen Teile der dort sichtbaren Rückkehrkante

$$r(5, 2) + r(5, 6) \quad \text{und} \quad r(4, 3) + r(4, 6)$$

enthalten die den Parametern $x = \pm\frac{\pi}{6}$ entsprechenden Erzeugenden stückweise, nämlich bis zu den Punkten

$$\begin{cases} a = -0{,}0125\ldots \\ b = -0{,}4535\ldots \\ c = +0{,}098\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +0{,}0125\ldots \\ b = -0{,}4535\ldots \\ c = +0{,}098\ldots, \end{cases}$$

in welchen sich $r(2, 1)$ und $r(5, 2) + r(5, 6)$ bzw. $r(3, 1)$ und $r(4, 3) + r(4, 6)$ berühren (pag. 50).

Die schematische Fig. 14d (Tafel II) entspricht der Konstruktion der Flächendurchdringung, welche in Fig. 14b (Tafel V) enthalten ist. Die Figg. 14c und 14a (Tafel V) stellen Projektionen der nämlichen Flächendurchdringung auf die ab- bzw. bc-Koordinatenebene dar. Die in diesen Figuren bezeichnete singuläre Stelle A der Fläche, welche den Schnittpunkt ihrer beiden stationären Erzeugenden enthält, ist in vergrößertem Maßstabe durch die Teilfiguren $14a_1$, $14b_1$ und $14c_1$ derselben Tafel V deutlich gemacht worden.

Durch Vergleich der Fig. 13 und 14d (Tafel II bzw. Tafel III) erkennt man, daß sich sowohl die in der bc-Ebene gelegenen 3-fachen Punkte der Doppelkurve als auch die beiden darauf verzeichneten 2 Paare Spitzen derselben für wachsende Parameter y voneinander entfernen. Einer der 3-fachen Punkte nähert sich dem in konstanter Höhe ($c = \frac{1}{3}$) über der ab-Koordinatenebene verbleibenden Doppelpunkt der Doppelkurve, und der andere der auf den Figuren verzeichneten Rückkehrkantenspitze in der bc-Ebene. Dieser letzteren nähert sich auch mit wachsendem Parameter y eines der obenerwähnten Spitzenpaare der Doppelkurve.

Auf pag. 49 ist nachgewiesen worden, daß 2 Paare Rückkehrkantenspitzen entstehen, sobald der Flächenparameter y den Wert $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ überschreitet. Aus dem Vergleich der Fig. 14d (Tafel III) mit Fig. 15 (Tafel III), welche die entsprechende Flächendurchdringung für den Parameterwert $y = 0{,}655$ zeigt, folgt, daß diese beiden Spitzenpaare in der Weise entstehen, daß die sich in obigen Punkten berührenden Rückkehrkanten sich mit wachsendem Para-

meter y nach entgegengesetzten Richtungen verschieben. Man vergleiche auch Fig. 5 (Tafel I). Die beiden schematischen Schnitte S_{12} und S_{13} zeigen, wie aus dem für den Parameter $y = 0{,}63$ gezeichneten Schnitt S_{10} die für den Parameter $y = 0{,}655$ verzeichnete Schnittfigur S_{14} entsteht. Sämtliche Schnitte S_{12}, S_{13} und S_{14} sind durch Ebenen hervorgebracht, welche durch den sich mit wachsendem y in der Richtung der abnehmenden c-Koordinaten bewegenden 3-fachen Punkt der Doppelkurve in der bc-Ebene parallel zur ab-Ebene gelegt sind. S_{12} gilt für einen Parameter $y = 0{,}632\ldots$, für welchen der Schnittpunkt der Rückkehrkanten mit diesem 3-fachen Punkt in einer Parallelen zur ab-Koordinatenebene liegt, und S_{13} hat für einen Parameter

$$y = \tfrac{2}{7}(3\sqrt{2} - 2) = 0{,}64074\ldots$$

Gültigkeit, für welchen die Doppelkurve die bc-Koordinatenebene in dem Schnittpunkt der beiden zu $x = \pm\frac{\pi}{4}$ gehörigen Erzeugenden

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -\tfrac{2}{7}(3 - \sqrt{2}) = -0{,}4538\ldots \\ c = \dfrac{-5 + 4\sqrt{2}}{7} = +0{,}0938\ldots \end{cases}$$

berührt. Fig. 16 (Tafel III) ist für den Parameter $y = \frac{2}{3}$ hergestellt worden.

Für diesen Parameterwert verschwindet

1 Paar räumliche Spitzen der Doppelkurve . . .	nach pag. 68
1 Spitze der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene	„ „ 65
1 Paar Rückkehrkantenspitzen	„ „ 49
1 dreifacher Punkt der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene	„ „ 56.

Für diesen Parameter verschwindet demnach der gesamte in Fig. 15 (Tafel III) verzeichnete untere Zweig der Doppelkurve und die mit demselben zusammenhängenden Flächensingularitäten reduzieren sich auf eine in der bc-Ebene liegende Rückkehrkantenspitze im Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -0{,}4 \\ c = \frac{1}{15} = 0{,}0666\ldots, \end{cases}$$

wie es in Fig. 16 (Tafel III) dargestellt ist. (Man vgl. auch Fig. 5.)

Das Verschwinden der beiden Rückkehrkantenspitzen und der beiden räumlichen Spitzen der Doppelkurve wird in Fig. 6 (Tafel II) durch den folgenden Verlauf der Kurven R und S charakterisiert.

Die Kurve R, welche im Punkt

$$v = 0{,}103 \ldots$$
$$y = \tfrac{3}{8}\sqrt{3}$$

der yv-Ebene ein Minimum besitzt, schneidet die y-Achse im Punkt

$$\begin{cases} v = 0 \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Da ihr im Gebiet der negativen v-Koordinaten verlaufendes Stück nicht auf das Vorhandensein reeller Rückkehrkantenspitzen schließen läßt, so deutet der durch diese Punkte abgegrenzte Teil der Kurve R das Verschwinden jener Rückkehrkantenspitzen an.

Eine analoge Bemerkung gilt für die Kurve S, welche nach Passieren eines Minimums im Punkt

$$\begin{cases} v = -0{,}149 \ldots \\ y = +0{,}6125 \end{cases}$$

der yv-Ebene (pagg. 67, 44) die y-Achse ebenfalls im Punkt mit der Ordinate $y = \frac{2}{3}$ schneidet. Die Fortsetzung dieses Teiles der Kurve S in das Gebiet der positiven v-Koordinaten deutet nach pag. 68 nicht das Vorhandensein eines reellen Spitzenpaares der Doppelkurve an. Denn in dem von der y-Achse und der Parallelen dazu $v = +1$ begrenzten Teil der yv-Ebene dringt dieser auf der Seite der positiven y-Ordinaten liegende Zweig der Kurve S nach einem kurzen Verlauf im Gebiet G_1 in das Gebiet G_0 ein, während der auf der Seite der negativen y-Ordinaten verlaufende Zweig von S im Intervall $0 < v < +1$ völlig im Gebiet G_2 verbleibt. Deshalb deutet der durch die obigen Punkte begrenzte Zweig im Gebiet der negativen v-Koordinaten das Verschwinden jenes Spitzenpaares an.

Bereits auf pag. 80 haben wir bemerkt, daß einer der beiden in Fig. 14d (Tafel III) verzeichneten 3-fachen Punkte der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene mit wachsendem Parameter y sich dem in derselben Ebene liegenden Doppelpunkt der Doppelkurve nähert. Für den Parameterwert $y = \frac{2}{3}$ fallen beide in den Punkt

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = +\frac{1}{3} \end{cases}$$

der bc-Ebene zusammen, in welchem sich 3 Zweige der räumlichen Doppelkurve berühren, wie es in der schematischen Fig. 16 (Tafel III) veranschaulicht ist. Für diese Werte von a, b, c und y hat Gleichung (4) von § 5 die 3 Doppelwurzeln $\lambda = 0, \pm 1$. Auf pag. 68 ist nachgewiesen worden, daß für den Wert $\frac{2}{3}$ übersteigende Werte von y 1 Paar 3-facher Punkte der Doppelkurve entsteht, welches für $y = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ verschwindet. Man erkennt durch Vergleich der schematischen Figg. 16 und 17d (Tafel III), wie diese beiden räumlichen 3-fachen Punkte durch das Vordringen des Flächenteiles 1 zustande kommen[1]).

In den Figg. 17a, 17b, 17c auf Tafel IV und $17a_1$, $17b_1$, $17c_1$ auf Tafel V ist die dem Parameter $y = 0{,}75$ entsprechende Fläche in 3 Projektionen veranschaulicht. Der Vergleich der Figg. 9a, 9b, 9c mit 17a, 17b, 17c auf Tafel IV läßt erkennen, daß die beiden Rückkehrkanten- und Doppelkurvenspitzen, von welchen auf pag. 75 und 76 die Rede war, sich in der dort angegebenen Weise von der bc-Koordinatenebene entfernt bzw. derselben genähert haben.

Man erkennt nun sehr leicht, wie es durch die weitere Verschiebung der Flächenteile in dem angegebenen Sinn für den Parameterwert $y = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ zum Verschwinden der beiden nicht auf den Koordinatenebenen liegenden 3-fachen Punkte der Doppelkurve kommt (pag. 56). Zugleich wird deutlich, daß für diesen Parameterwert 2 Paar räumliche Spitzen verschwinden müssen. Die Parallele zur v-Achse in der yv-Ebene (Fig. 6, Tafel I) $y = \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}$ schneidet den für positive y in Betracht kommenden Zweig der Kurve D_2 in den Punkten mit den Abszissen

$$v = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad v = -2 + \sqrt{5} \quad \text{(pag. 59)}.$$

Im ersten Punkt besitzt D_2 sowohl als S ein Maximum (pag. 60, 67), und der zweite Punkt ist Schnittpunkt von D_2 mit R (pag. 60). Die Koordinaten der Flächenpunkte, in welchen je 2 Spitzen und

[1]) In diesen nicht auf der bc-Ebene gelegenen 3-fachen Punkten der Doppelkurve hängen ebenfalls die Räume R_0, R_1, R_2, R_3 miteinander zusammen, wie in den 3-fachen Punkten in der bc-Ebene. Ein Unterschied des Zusammenhanges dieser Räume in den beiden Arten 3-facher Punkte ist der, daß eine parallel zur ab-Koordinatenebene durch die Punkte gelegte Ebene in dem einen Fall 2 oder 3 Räume, im Falle der im Raum gelegenen 3-fachen Punkte alle 4 Räume R_0, R_1, R_2, R_3 durchschneidet. Man vergleiche hiezu S_{17}, S_{16}, S_{15}, S_{14}.

ein 3-facher Punkt der Doppelkurve mit einer Rückkehrkantenspitze zusammenfallen, sind auf pag. 62 angegeben worden. Durch diese Punkte gehen die den Parametern

$$\lambda_1 = \lambda_3 = -\sqrt{\sqrt{5}-2} \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = +\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

$$\lambda_5 = -\frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{5}-3} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_5 = +\frac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{5}-3}$$

entsprechenden Erzeugenden der Fläche hindurch.

Die Fig. 18 (Tafel III) zeigt für diesen Parameterwert die Durchdringungsverhältnisse der Flächenteile.

Für größere Werte des Parameters y vereinfacht sich die Gestalt des in Rede stehenden Zweiges der Doppelkurve, wie aus Fig. 19d (Tafel III) zu ersehen ist, dadurch wesentlich, daß durch das weitere Vordringen des Flächenteiles 1 und durch die Vergrößerung des Raumes R_3 der auf dem Aste einer Hyperbel fortschreitende 3-fache Punkt dieses Zweiges der Doppelkurve und das Paar Berührpunkte derselben mit den beiden auf der Figur verzeichneten Rückkehrkantenspitzen sich von dem in konstanter Höhe über der ab-Koordinatenebene verbleibenden Doppelpunkt immer weiter entfernt. Die Figg. 19a, 19b, 19c (Tafel IV) stellen Gesamtansichten der dem Parameter $y = 2{,}5$ entsprechenden Fläche dar.

Die schematische Fig. 19d (Tafel III) ist der Fig. 19b (Tafel IV) entnommen. Auf pag. 56 ist nachgewiesen worden, daß zwei 3-fache Punkte der Doppelkurve in der bc-Koordinatenebene entstehen, sobald y den Parameterwert

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61805\ldots$$

überschreitet, wovon einer für den Parameterwert $y = 2$ wieder verschwindet, so daß sämtliche Flächen, die größeren Parameterwerten entsprechen, Doppelkurven mit nur 2 dreifachen Punkten in der bc-Ebene besitzen. Diese Doppelkurven haben auf ihren nicht isolierten Teilen keine reellen Spitzen, da, wie auf pag. 68 gezeigt wurde, das Paar reeller Spitzen der Doppelkurven, die den Parametern $\frac{2}{5}\sqrt{5} < y < 2$ entsprechen, für $y = 2$ verschwindet. Das Verschwinden dieses Spitzenpaares wird verständlich, wenn die Figg. 17a, 17b, 17c mit den entsprechenden Ansichten 19a, 19b, 19c auf Tafel IV miteinander verglichen werden.

Wir bemerken zunächst bezüglich der Fig. 6 (Tafel I) folgendes: $y = +2$ ist eine Asymptote der Kurve S. Von dem auf der Seite der positiven v- und y-Koordinaten, und zwar im Gebiete G_2 verlaufenden Zweig der Kurve S haben wir auf pag. 73 erkannt, daß der Verlauf desselben denjenigen eines Spitzenpaares der Doppelkurve charakterisiert, das sich aus einem der beiden für $y = 0$ existierenden Paare Doppelkurvenspitzen entwickelt. Wir haben des öfteren bemerkt (pag. 75, 76), daß dieses Spitzenpaar mit wachsendem Parameter y sich den zu $x = \pm\frac{\pi}{6}$ gehörigen Erzeugenden und zugleich der yv-Koordinatenebene nähert. Für $y = \frac{3}{8}\sqrt{3}$ fällt es auf diese Erzeugenden, entfernt sich für weiter wachsende Parameter y etwas von denselben, nähert sich aber immer der bc-Ebene, mit welcher es für

$$\begin{cases} y = 2 \\ v = \infty \end{cases}$$

in den Punkt

$$\begin{cases} b = +2 \\ c = -1 \end{cases}$$

derselben zusammenfällt. Für größere Werte des Parameters y existiert es nicht mehr reell (pag. 68).

Gleichung (4) von § 5 hat für

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ a &= 0 \\ b &= 2 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

die 4-fache Wurzel $\lambda = 0$ und die Doppelwurzel $\lambda = \infty$.

Dieser Punkt ist demnach Schnittpunkt der dem Parameter $x = +\pi$ entsprechenden Erzeugenden der Fläche, welche in der bc-Ebene liegt, mit der ebenfalls in dieser Ebene gelegenen Rückkehrkantenspitze der Fläche, deren Tangente die dem Parameter $x = 0$ entsprechende Erzeugende ist.

Andererseits wissen wir, daß für den Parameterwert

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61805\ldots$$

ein Paar 3-facher Punkte in der bc-Ebene entsteht (pag. 56). Dasselbe wird offenbar dadurch gebildet, daß der Zweig der Doppelkurve, welche diesem Parameterwert entspricht, und das obener-

wähnte Spitzenpaar enthält, die bc-Koordinatenebene auf beiden Seiten in einem Punkte der ebenen Doppelkurve berührt. Man findet für die Koordinaten dieses Berührpunktes

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{5}(5 + \sqrt{5}) = 1{,}4472\ldots \\ c = -\frac{1}{10}(5 + 3\sqrt{5}) = -1{,}17083\ldots \end{cases}$$

und für die Parameter der Erzeugenden, welche durch denselben hindurchgehen:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \infty \\ \lambda_3,\ \lambda_5 = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}. \end{cases}$$

In diesem Falle ist die dem Parameter $\lambda = \infty$ entsprechende Erzeugende Tangente an die Doppelkurve der Fläche in der bc-Ebene und der obige Punkt ist ihr Berührungspunkt mit derselben. Für wachsende Parameter y schneidet diese Erzeugende die ebene Doppelkurve in 2 reellen Punkten, welche 3-fache Punkte der Doppelkurve der Fläche darstellen. Für $y = +2$ fällt einer dieser Schnittpunkte mit dem ersten der obenerwähnten Punkte zusammen, in welchem zugleich die ebene Doppelkurve in ihrem nicht isolierten Teile endigt. Für noch größere Werte des Parameters y fällt einer der Schnittpunkte der Erzeugenden auf den isolierten Teil der ebenen Doppelkurve, so daß auf diese Weise einer der 3-fachen in der bc-Koordinatenebene und auf der Fläche gelegenen 3-fachen Punkte der Doppelkurve verschwindet[1]); der andere bleibt auf der Fläche bestehen für alle Werte des Parameters $y > 1{,}61805\ldots$

Im Schnittpunkt der den Parametern $\lambda = 0$ $(x = 0)$ bzw. $\lambda = \infty$ $(x = \pi)$ entsprechenden Erzeugenden der Fläche, welche beide in der bc-Ebene verlaufen, durchsetzt die räumliche Doppelkurve der Fläche diese Ebene senkrecht (pag. 47).

Da in dem ersten der oben besprochenen Punkte, welcher diesen Schnittpunkt für $y = 2$ darstellt, außerdem noch 2 Spitzen des betreffenden räumlichen Zweiges der Doppelkurve zusammenfallen, so ist dieser Punkt ein Spitzpunkt der räumlichen Doppelkurve, welche die bc-Ebene dort senkrecht durchstößt, während im

[1]) Er geht in einen nicht auf der Fläche gelegenen Punkt über, durch welchen die den Parametern $x = 0$, $\frac{\pi}{2} + ik$, $\frac{\pi}{2} - ik$ entsprechenden Erzeugenden hindurchgehen.

Durchstoßpunkt die in der bc-Ebene verlaufende Doppelkurve in ihrem nicht isolierten Teil endigt. Auf diese Weise ist verständlich gemacht, wie der in Fig. 17c (Tafel IV) verzeichnete nicht isolierte Zweig der räumlichen Doppelkurve, welcher für $y = 0{,}75$ noch 2 reelle Spitzen enthält, unter Verlust derselben und unter Verlust eines der für $y = 1{,}61805$ gewonnenen in der bc-Ebene 2-fachen Punktes durch einen Spitzpunkt hindurch in den entsprechenden in Fig. 19c (Tafel IV) verzeichneten Zweig übergeht.

Sobald der Flächenparameter $-A = y$ den absoluten Betrag 2 überschreitet, findet keine Änderung mehr in der Anzahl der verschiedenen Arten reeller Singuluritäten der betreffenden Flächen statt. Sämtliche Flächenmäntel und die Räume R_0, R_1, R_2 rücken in das Unendliche. Im Endlichen verbleibt der Raum R_3, welcher für die Parameterwerte

$$|y| < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

noch nicht reell existiert. In seinen entfernteren Teilen grenzt er an konkave Flächenmäntel, durch welche er von dem Raum R_2 getrennt ist, und an Teile des nicht isolierten Zweiges der Doppelkurve, längs welcher sich die konkaven Flächenmäntel durchdringen.

Hier kommuniziert er mit den Räumen R_2 und R_1, und in den beiden in der bc-Koordinatenebene gelegenen 3-fachen Punkten dieses Zweiges der Doppelkurve mit R_2, R_1 und R_0. Einer davon ist gleichzeitig mit dem Raum R_3 und der andere für

$$|y| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

entstanden. Die Entstehung des Raumes R_3 war mit dem Auftreten von reellen 3-fachen Punkten des nicht isolierten Teiles der Doppelkurve verbunden und die weitere Ausdehnung dieses Raumes hatte das Verschwinden der reellen Spitzen dieses Teiles der Doppelkurve zur Folge ($|y| = 2$).

Fig.1.

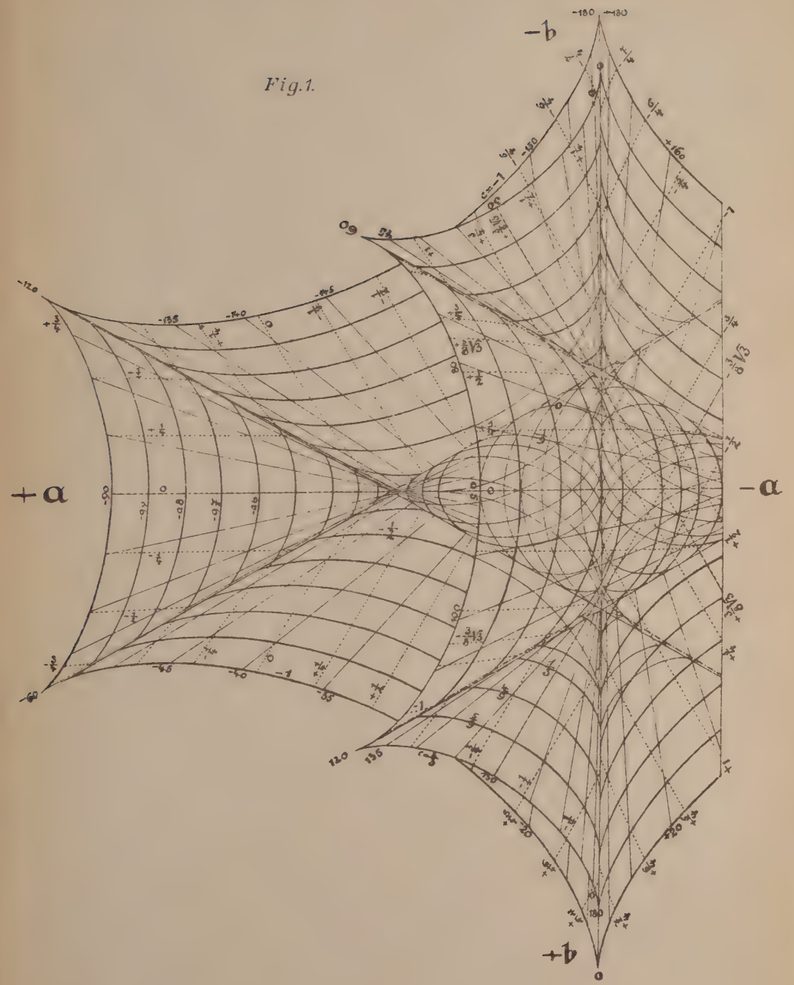


Fig.2.

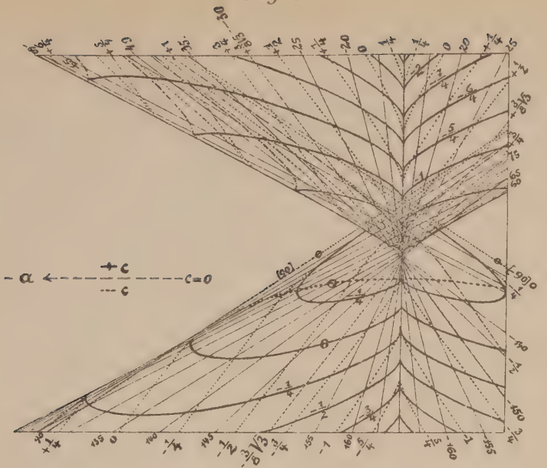


Fig.2a.

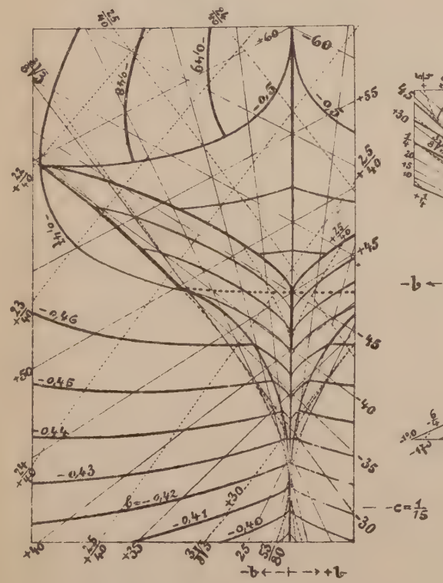


Fig.3.

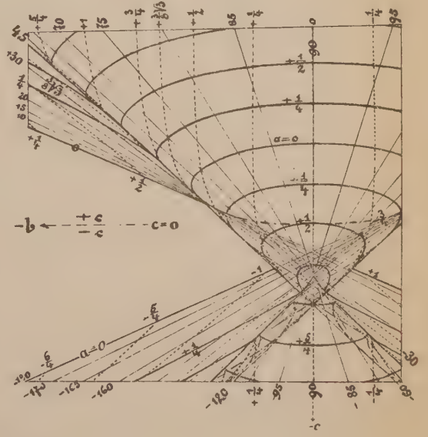
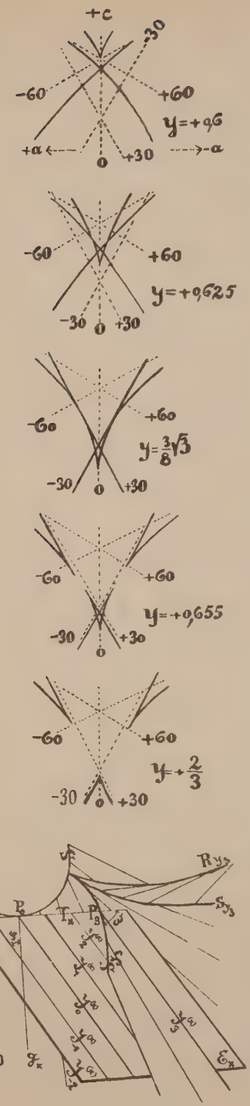


Fig.5.



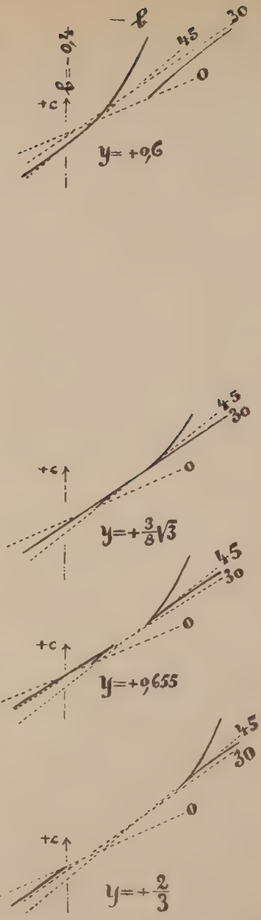


Fig.4.

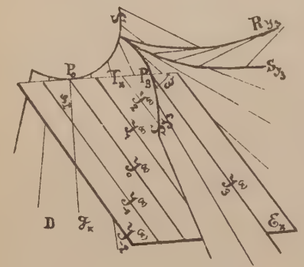


Fig.6.

Fig.7f.

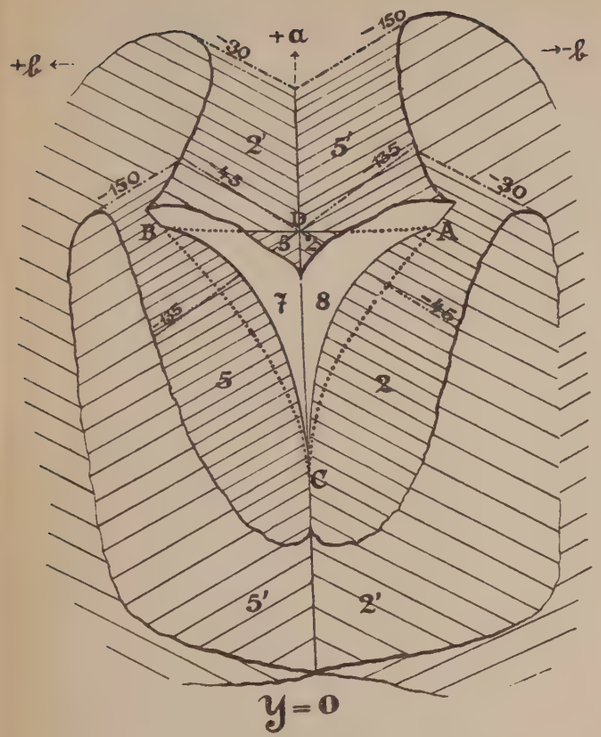


Fig.8c.

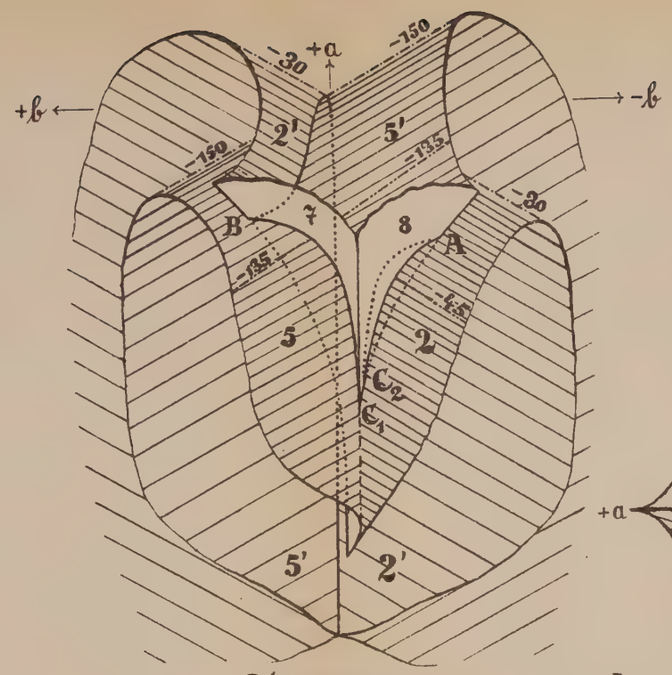


Fig.7d.

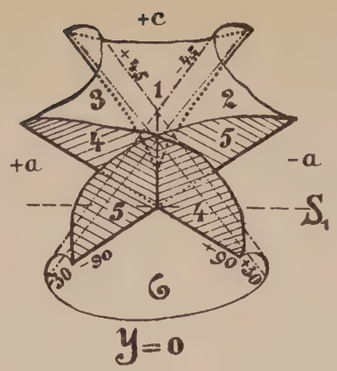
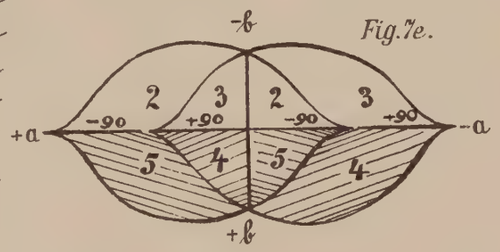


Fig.7e.



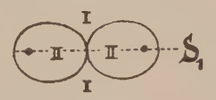


Fig.8a.

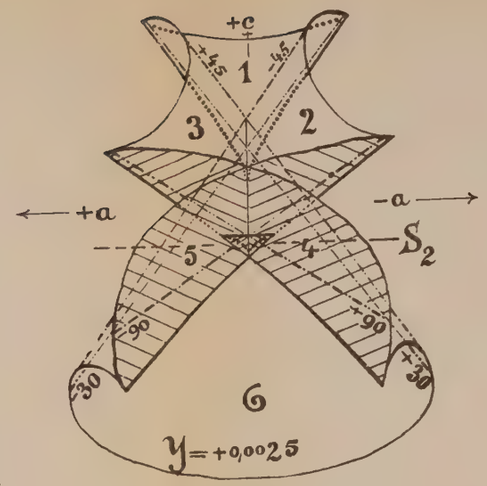


Fig.9d.

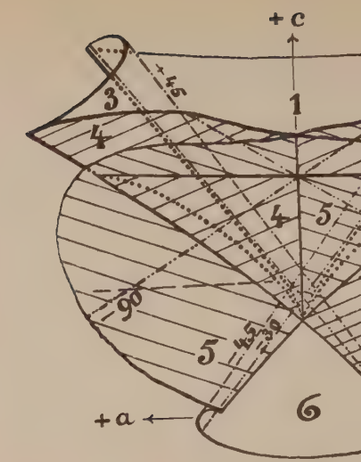
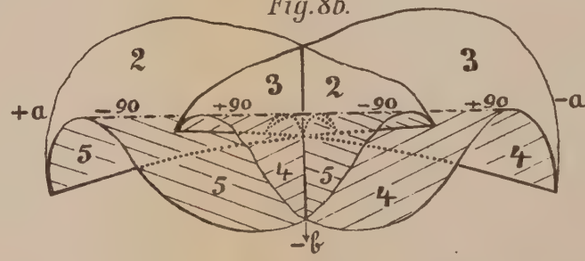
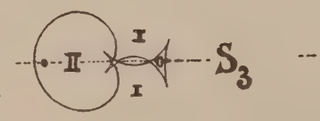


Fig.8b.





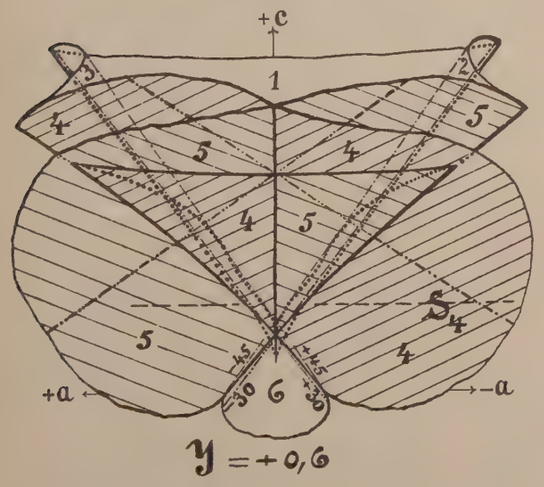


Fig.10.

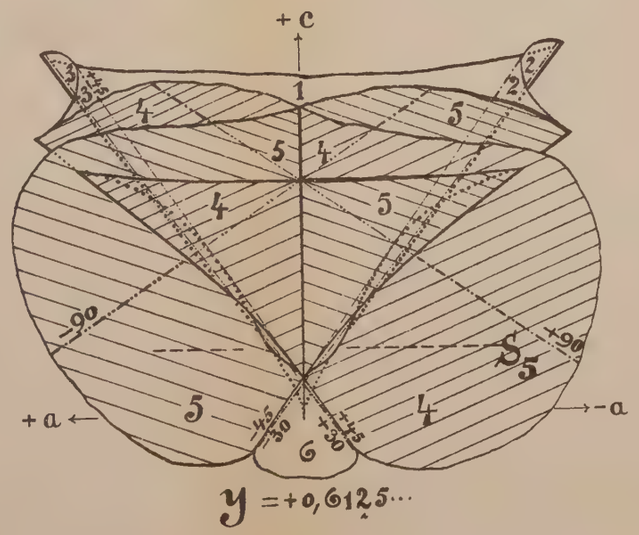


Fig.11.

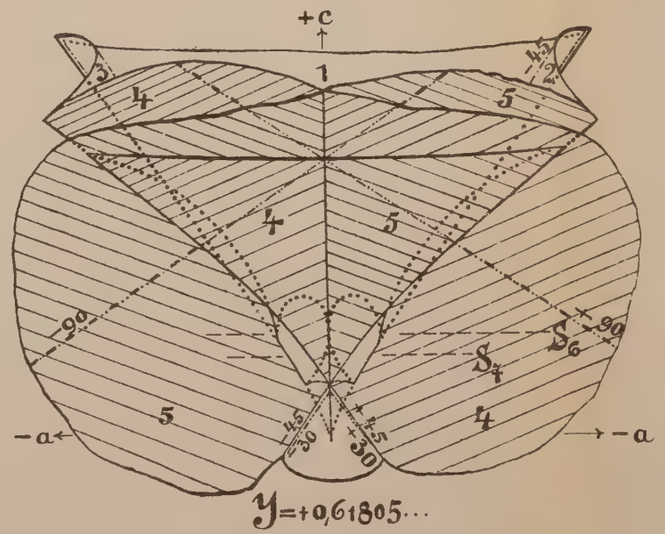


Fig.12.

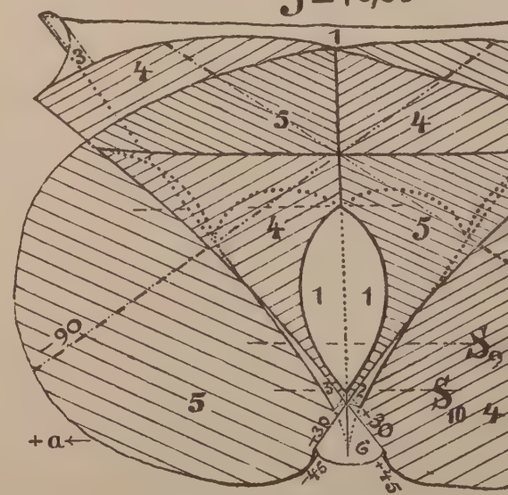


Fig.13.

y=0

Fig.7a.

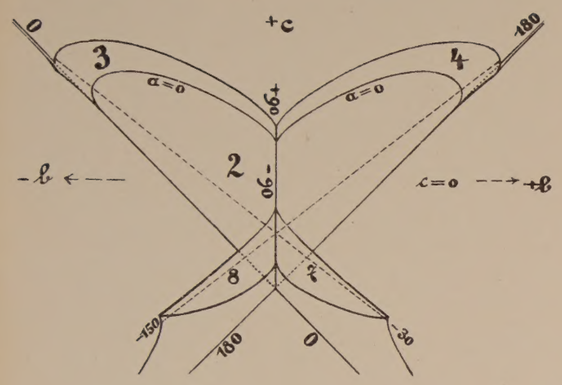
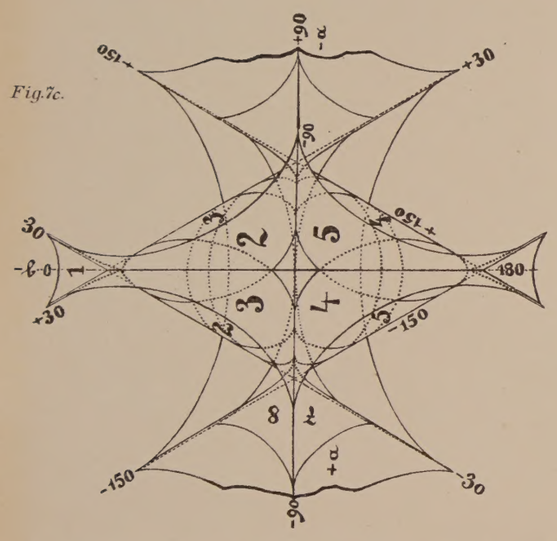


Fig.7c.



y=0,5

Fig.9a.

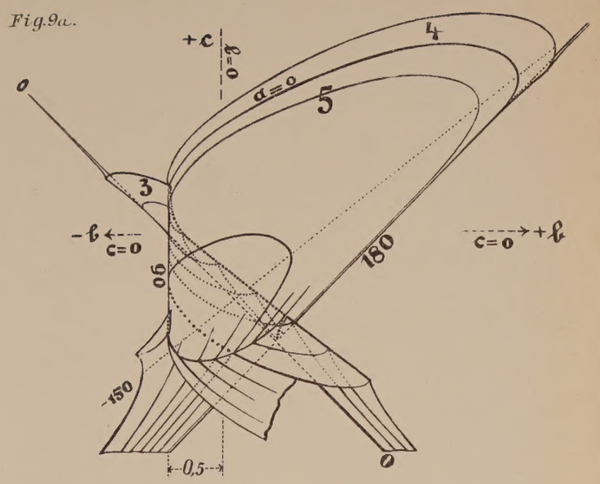
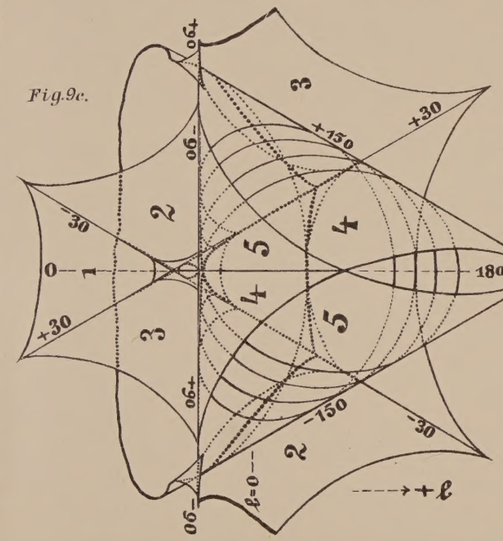


Fig.9c.



y=0,75

Fig.17a.

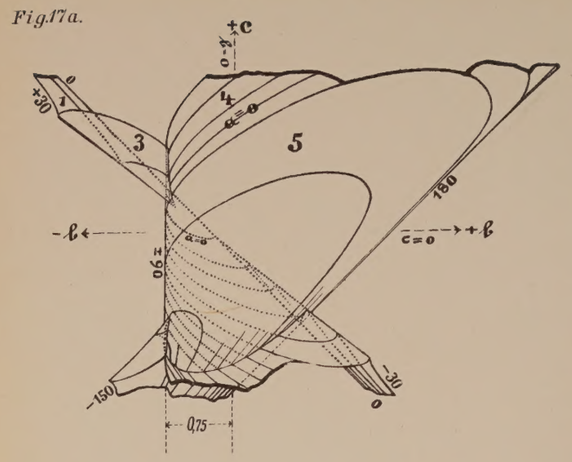
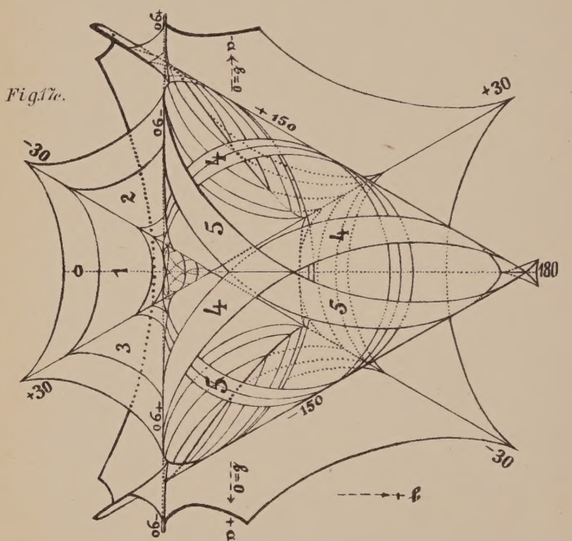
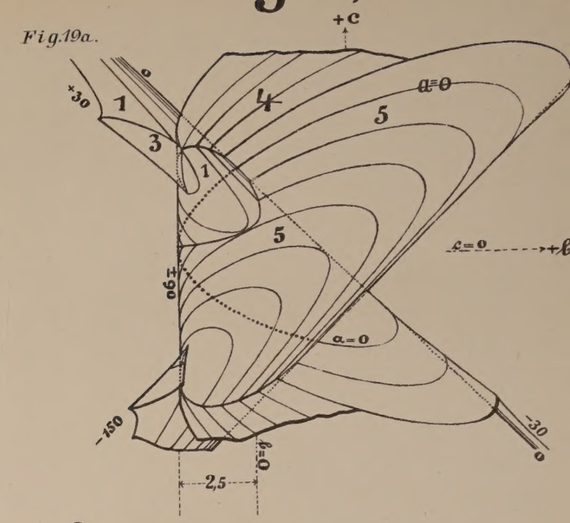


Fig.17c.



y=2,5

Fig.19a.



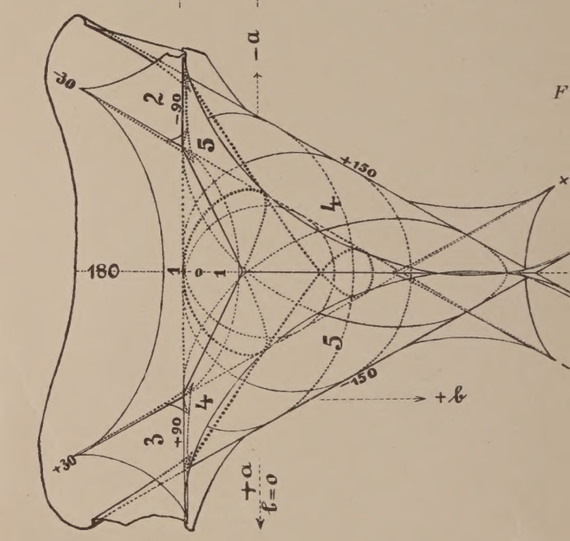


Fig.7b.

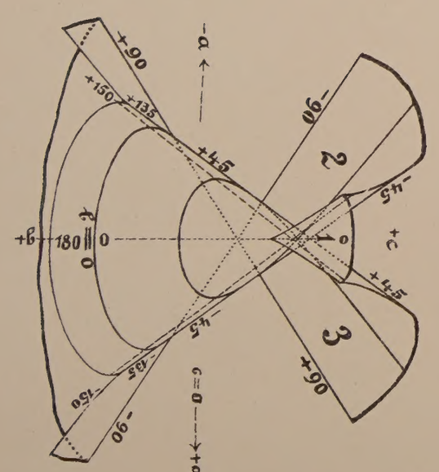


Fig.9b.

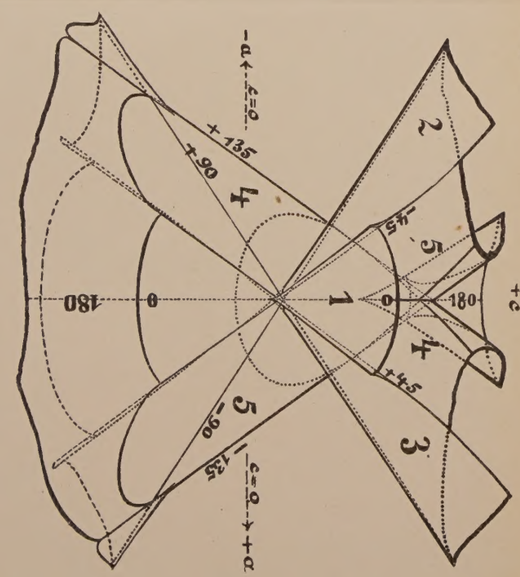


Fig.17b.

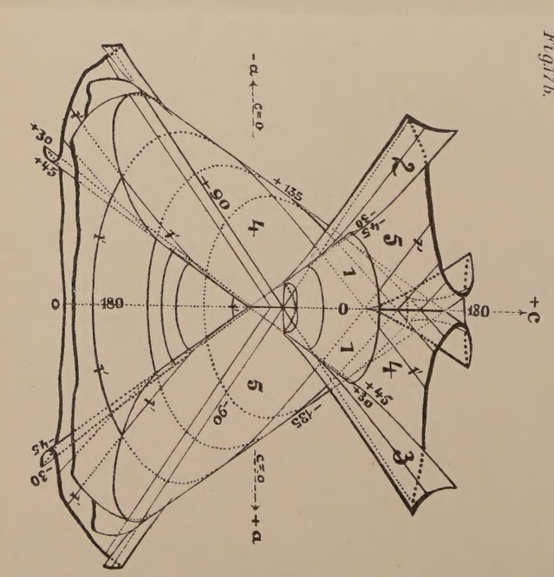
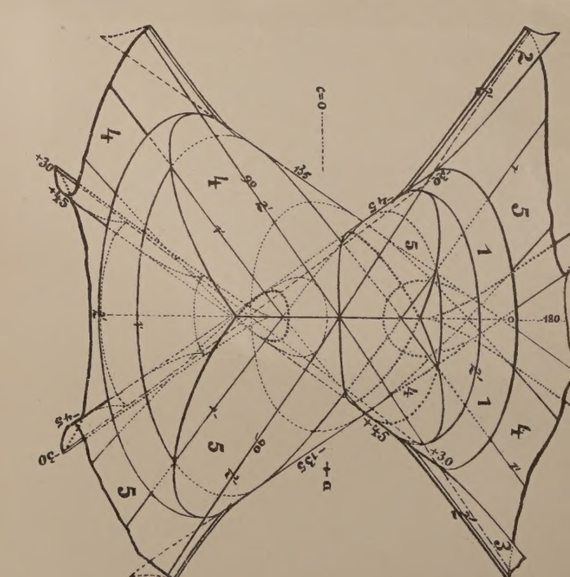


Fig.19b.



Taf.V.

$y = 0{,}75$

Fig.17a_1.

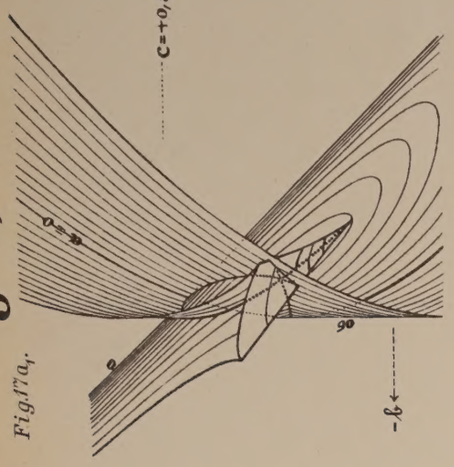


Fig.17c_1.

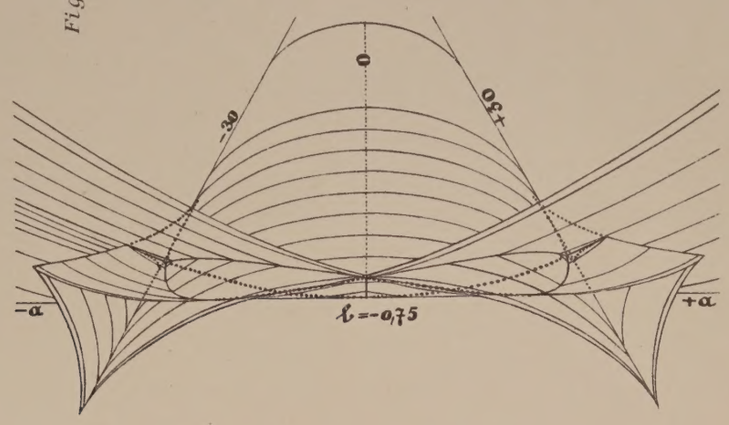
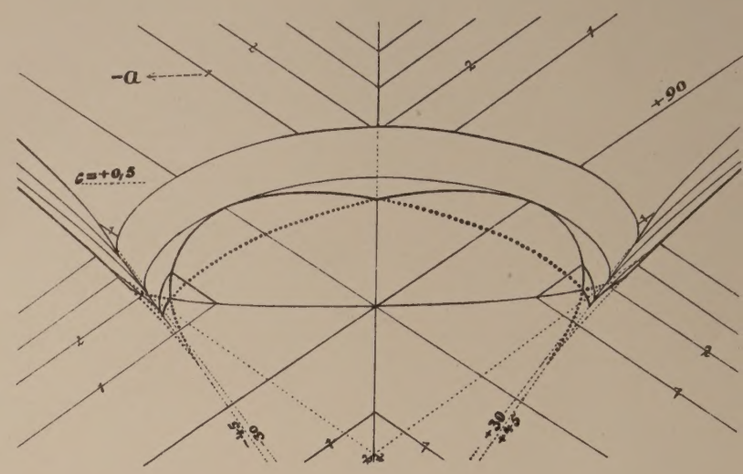


Fig.17b_1.



$y = \frac{3}{8}\sqrt{3}$

Fig.14a_1.

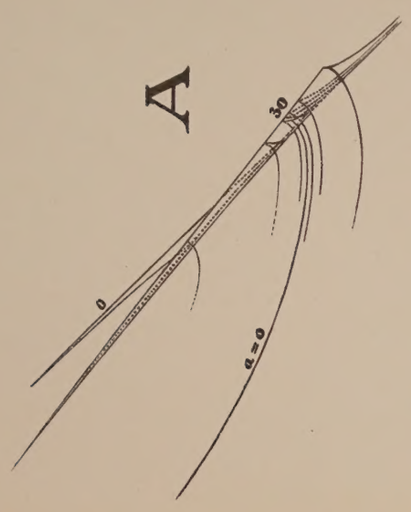


Fig.14c_1.

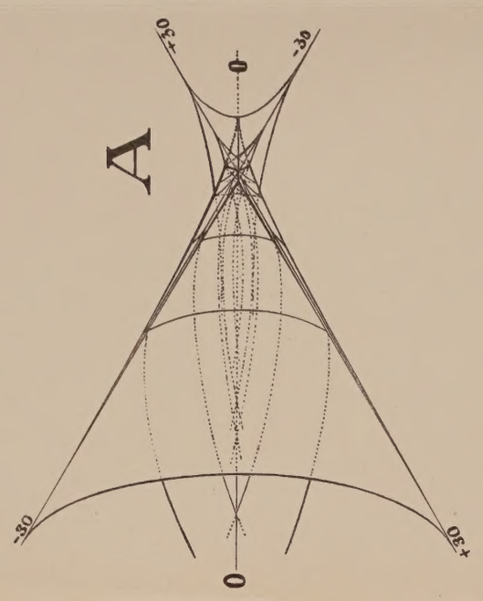
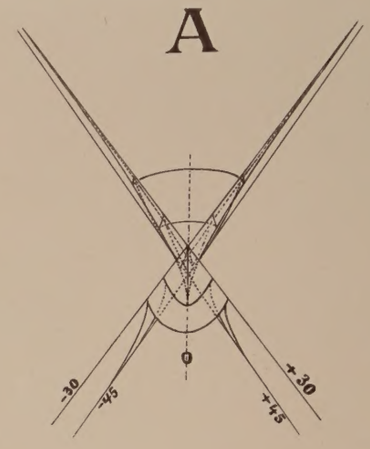


Fig.14b_1.



$y = \frac{3}{8}\sqrt{3}$

Fig.14a.

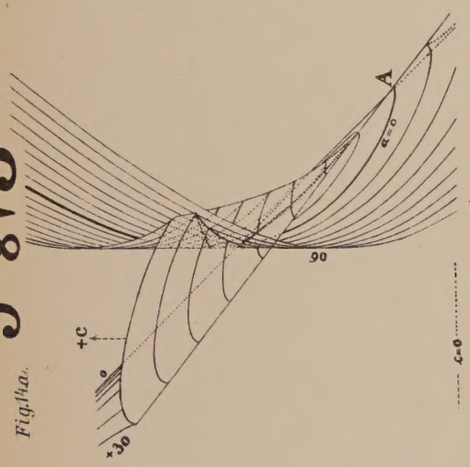


Fig.14c.

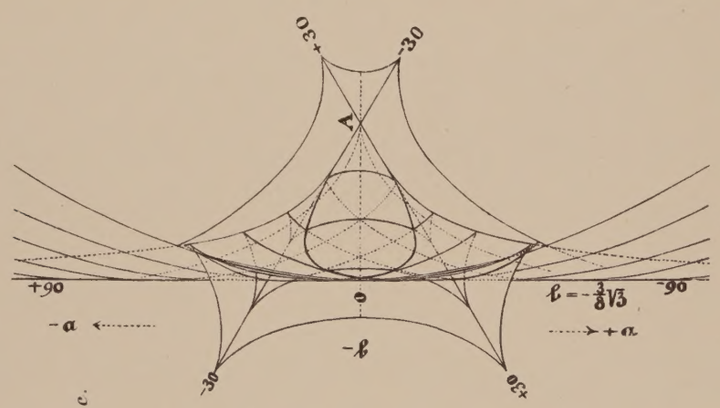
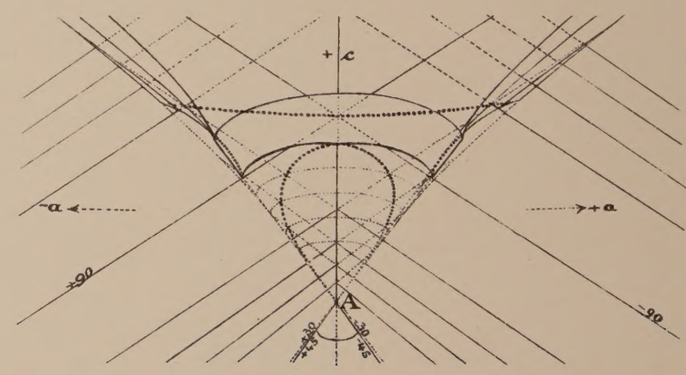


Fig.14b.



$y = 0{,}5$

Fig.9a_1.

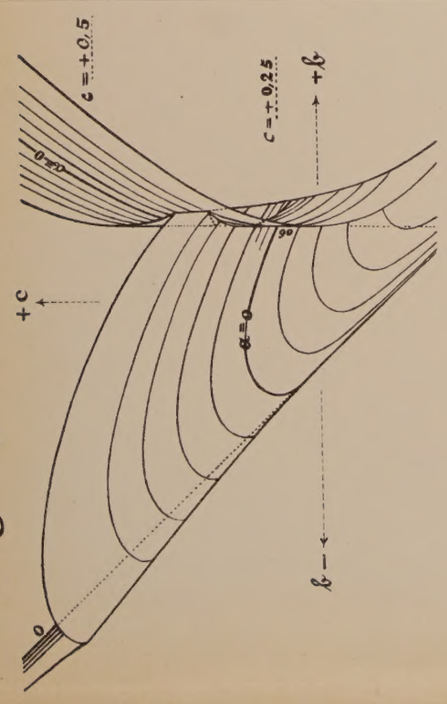


Fig.9c_1.

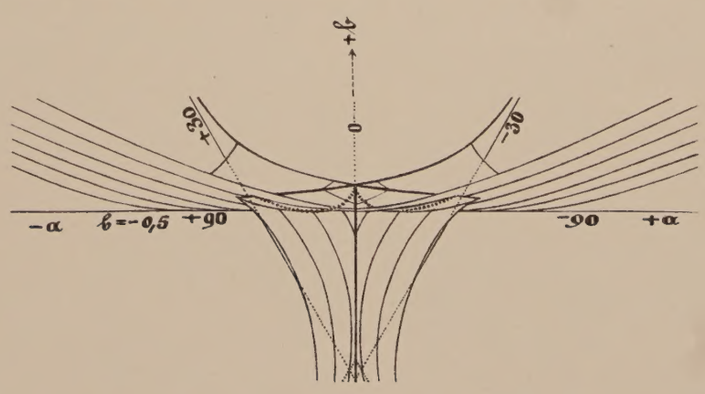
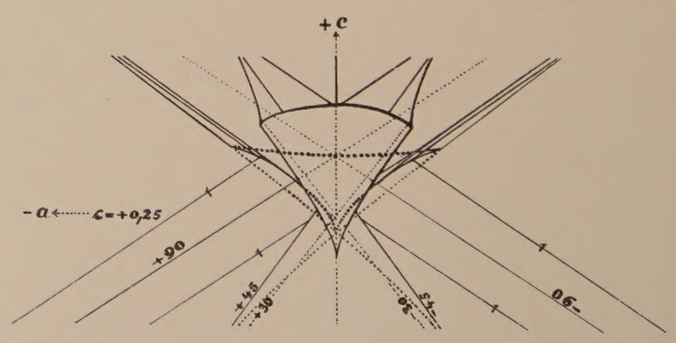



Fig.9b_1.